

Part 1. Number Theory

1. 합동

Definition $m \in \mathbb{Z}^+, a, b \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a-b$ a 는 법 m 에 대하여 b 에 합동이다.
 a 를 m 으로 나눈 나머지는 b 이다. a 를 m 으로 나눈 나머지와 b 를 m 으로 나눈 나머지는 서로 같다.

잉여역수: a 와 m 이 서로소일 때, 일차합동식 $ax \equiv 1 \pmod{m}$ 의 해를 a 의 법 m 에 대한 잉여역수라고 한다. 이 잉여역수를 b 라 하면, $ab = ba \equiv 1 \pmod{m}$ 이고, 이러한 b 는 법 m 에 대하여 유일하다.

2. 일차합동식의 해법

Definition $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m}$: 미지수 x 에 관한 n 차 합동식
 $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ 에 대하여 $f(c) \equiv 0 \pmod{m}$ 일 때, $x \equiv c \pmod{m}$ 을 이 합동식의 해라고 한다.

Lemma 일차합동식 $ax \equiv b \pmod{m}$, $\gcd(a, m) = 1 \Rightarrow ax \equiv b \pmod{m}$ 은 유일한 해를 갖는다.
 일차합동식 $ax \equiv b \pmod{m}$, $\gcd(a, m) = d \mid b \Rightarrow ax \equiv b \pmod{m}$ 의 해는 존재한다.
 또한, $\gcd(a, m) = d \mid b \Rightarrow ax \equiv b \pmod{m}$ 이 경우, 정확하게 d 개의 해가 존재한다.

Lemma $\gcd(a, m) = 1$ 인 정수 a 에 대하여 $aa^* \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow a^*$: 법 m 에 관한 a 의 역원

■ **Example** 일차합동식 $14x \equiv 27 \pmod{31}$ 의 해를 구하시오.

■ **Solution** $14x \equiv 27 \equiv 58 \pmod{31} \Leftrightarrow 7x \equiv 29 \pmod{31} \Leftrightarrow 7x \equiv 91 \pmod{31}$ $91 = 7 \cdot 13$ 이므로
 $x \equiv 13 \pmod{31}$

■ **Example** 일차합동식 $9x \equiv 12 \pmod{15}$ 의 해를 구하시오.

■ **Solution** $\gcd(9, 15) = 3$ 이고 $3 \mid 12$ 이므로 위 합동식의 해는 3개이다. 양변을 3으로 나누면,
 $3x \equiv 4 \pmod{5}$ 의 해를 구하자. 이때, $x_0 \equiv 3 \pmod{5}$ 이 한 해이므로
 $x \equiv 3 + \frac{15}{3}t \pmod{15} (t = 0, 1, 2)$ 따라서 $x \equiv 8 \pmod{15}$, $x \equiv 13 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$

3. 오일러(Euler) ϕ -함수와 오일러의 정리

(1) 오일러 ϕ -함수

Definition 임의의 양의 정수 m 에 대하여 m 이하의 양의 정수 가운데 m 과 서로 소인 양의

정수의 개수를 $\phi(m)$ 이라고 정의하고, 오일러의 ϕ -함수라고 한다.

$\phi(m) = m \times (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_n})$ 이다. 단, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 은 m 의 소인수이다.

■ **Example** $\phi(100) = 40$, $\phi(1000) = 400$ 이다.

(2) 오일러 ϕ -함수의 성질(단, p 는 소수)

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$$

$$\phi(2^k) = 2^{k-1}$$

$$\phi(p) = p-1$$

$$\phi(m) = m \times (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_n}) \text{ 단, } p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \text{은 } m \text{의 소인수이다.}$$

(3) 오일러 정리

Definition n 이 양의 정수이고, $\gcd(a, n) = 1$ 이면, $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 이다.

■ **Example** 33^{100} 을 40으로 나눈 나머지를 구하여라.

■ **Example** $n^{1998} - 4$ 가 17의 배수가 되는 자연수 n 의 최소값을 구하여라.

Lemma 제곱수의 잉여계, 정수 n 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} n^2 \equiv 0 \text{ 또는 } 1 \pmod{3}$$

$$\textcircled{2} n^2 \equiv 0 \text{ 또는 } 1 \pmod{4}$$

$$\textcircled{3} n^2 \equiv 0 \text{ 또는 } \pm 1 \pmod{5}$$

$$\textcircled{4} n^2 \equiv 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 또는 } 4 \pmod{8}$$

■ **Example** 다음 중 정수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + 5z^2$ 꼴로 쓸 수 없는 정수는? 【2005 KMO】

- ① 2003 ② 2004 ③ 2005 ④ 2020 ⑤ 2046

4. 윌슨(Wilson)과 페르마(Fermat)의 작은 정리

(1) 윌슨(Wilson)의 정리

Definition p 가 소수일 때, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 가 성립한다. 또 그 역도 성립한다.

■ **Example** 17!을 19로 나눈 나머지를 구하여라.

(2) 페르마(Fermat)의 작은 정리

Definition p 가 소수이고, $p \nmid a$ 이면 (즉, $\gcd(p, a) = 1$ 이면) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 이다.

Lemma p 가 소수이면, $a^p \equiv a \pmod{p}$ 가 성립한다.

■ **Example** 50^{250} 을 83으로 나눈 나머지를 구하여라.

5. 중국인의 나머지 정리

$m_1, m_2, \dots, m_n$ 이 쌍마다 서로소 일때, 다음 연립합동식

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$x \equiv a_3 \pmod{m_3}$$

$\vdots$

$x \equiv a_n \pmod{m_n}$ 은 범 $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$ 에 대하여 유일한 해를 갖는다.

■ **Example** 연립합동식 $x \equiv 2 \pmod{4}$, $x \equiv 7 \pmod{9}$ 를 풀어라.

■ **Example** 연립합동식 $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$ 을 풀어라.

Remark $\gcd(m_1, m_2) \nmid (a_1 - a_2)$ 이면, 주어진 연립합동식의 해가 존재하지 않는다.

6. 디오판틴(Diophantine)부정방정식

(1) 일차부정방정식 $ax + by = c$ 의 해를 구하는 과정

① $d = \gcd(a, b)$ 를 유클리드 알고리즘을 사용하거나 직접 구한다.

② $d \nmid c$ 이면 해가 존재하지 않는다.

③ $d \mid c$ 이면 유클리드 알고리즘 역순으로 $as + bt = d$ 인 정수 s, t 를 구하고,
 $x_0 = se$, $y_0 = te$ 는 주어진 방정식의 특수해

$$\textcircled{4} \text{ 일반해 } \begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

■ **Example** 1차 부정방정식 $172x + 20y = 1000$ 의 정수해를 구하시오.

1차 부정방정식 $20x + 50y = 510$ 의 양의 정수해를 구하시오.

■ **Example** 다음 조건을 만족하는 정수해 (x, y, z) 는 모두 몇 개인지 구하시오.

$$x + y - z = 10, \quad x > 0, y > 2, z < 3$$

■ **Example** 1차부정방정식 $2x + 3y + 4z = 5$ 의 정수해를 구하시오.

■ **Example** 두 정수 102와 222의 최대공약수 $\gcd(102, 222)$ 와 $\gcd(102, 222) = 102s + 222t$ 가 되는 정수 s, t 를 구하시오.

Part 2. Algebra Theory

1. 다항식과 방정식

■ 다항식의 나눗셈

$\deg f \geq \deg g$ 인 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg g$ 를 만족하는 다항식 $q(x)$ 와 $r(x)$ 가 유일하게 존재한다. 이 때, $q(x)$ 를 몫, $r(x)$ 를 나머지라고 한다.

■ **Example** $f(x) = x^7 - 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$ 일 때, $f(x)$ 을 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

■ 다항식의 나머지 정리와 인수정리

$\deg f = n$ 인 다항식 $f(x)$ 와 실수 a 에 대하여, $f(x)$ 를 $x - a$ 로 나누면 $f(x) = (x - a)q(x) + r$, $\deg q = n - 1$ 을 만족하는 $q(x)$ 와 실수 r 이 존재한다. $x = a$ 를 대입하면 $f(a) = r$ 이고, 따라서, $f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$ 이다. 만약 $f(a) = 0$ 일 때, a 를 $f(x) = 0$ 의 근(해)라고 한다. 또한, $f(x) = (x - a)q(x)$ 이다. 또, a_1, a_2 가 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 해라고 하면 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_1(x)$, $\deg q_1 = n - 2$ 이다. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이 $f(x) = 0$ 의 해이면, $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ 이다. c 는 상수이다.

■ 대수학의 기본정리

n 차 다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 는 복소수근을 포함하여 n 개의 근을 갖는다.

■ 비에트의 정리(Viete's Theorem)

(1) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면, 다음이 성립한다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(2) 삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면, 다음이 성립한다.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

(3) n 차 방정식

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (단, a_k 는 x^k 의 계수이다. $k = 0, 1, \dots, n$)의 n 개의 근을 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이라고 하면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1 x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

■ **Example** 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 연속하는 정수이고, p 와 q 가 소수일 때, p, q 의 값을 구하여라.

2. 인수분해

■ 기본적인 인수분해 공식

실수 a, b, c, d, x, y, z 에 대하여, 다음이 성립한다.

- (1) $x^2 \pm 2xy \pm y^2 = (x \pm y)^2$ (복호동순)
- (2) $x^2 \pm (a+b)x + ab = (x \pm a)(x \pm b)$ (복호동순)
- (3) $acx^2 \pm (ad+bc)x + bd = (ax \pm b)(cx \pm d)$ (복호동순)
- (4) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2$
- (5) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$
- (6) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$
- (7) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- (8) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- (9) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
- (10) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
- (11) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

■ 실수 a, b 에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) n 이 홀수이면, $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ 이다.
 (2) n 이 양의 정수이면, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ 이다.

■ 대칭식의 인수분해

x, y, z 에 관한 정식 $f(x, y, z)$ 에서 x, y, z 의 어느 두 문자를 교환해도 식이 변함없을 때, 식 $f(x, y, z)$ 을 대칭식이라고 한다. 대칭식은 다음 3개의 기본대칭식에 관한 정식으로 표현 가능하다.
 $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$

■ 교대식의 인수분해

x, y, z 에 관한 정식 $f(x, y, z)$ 에서 x, y, z 의 어느 두 문자를 교환해도 식이 원래의 식과 부호가 반대인 것으로 될 때, $f(x, y, z)$ 를 교대식이라 한다. 교대식은 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 를 인수로 갖는다.

■ 대칭식과 교대식 사이의 관계

교대식과 교대식, 교대식과 대칭식, 대칭식과 대칭식 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} (\text{대칭식}) \pm (\text{대칭식}) &= (\text{대칭식}) \\ (\text{교대식}) \pm (\text{교대식}) &= (\text{교대식}) \\ (\text{교대식}) \times (\text{대칭식}) &= (\text{교대식}) \\ (\text{교대식}) \times (\text{교대식}) &= (\text{대칭식}) \end{aligned}$$

■ Example 다음 식을 인수분해 하라. $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)$

■ Example 방정식 $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = 47$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하라 【2007 KMO】

3. 함수방정식

■ 함수방정식 I x, y 에 특정한 값을 대입하여 함수의 성질을 알아낸다.

- (i) $x = 0, x = \pm 1$
 (ii) $y = 0, y = \pm 1$
 (iii) $x = -x, y = -y$

를 대입하여 함수의 성질을 알아낸다. 방정식을 만족하는 함수가 가져야할 성질들은 다음과 같다.

- (i) 일대일 함수 : $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
 (ii) 일대일 대응 일대일 함수이며, 모든 y 에 대하여 $f(x) = y$ 를 만족하는 x 가 존재한다.
 (iii) 주기함수 모든 x 에 대하여, $f(x+p) = f(x)$ 이다. 여기서, 최소의 양수 p 가 주기이다.
 (iv) 기함수 모든 x 에 대하여, $f(-x) = -f(x)$ 이다.
 (v) 우함수 모든 x 에 대하여, $f(-x) = f(x)$ 이다.

■ Example 함수 $f(x)$ 는 임의의 실수 x 에 대하여 $f(1+x) + xf(1-x) = x^2 + x$ 를 만족시킨다.

$f(-6)$ 의 값을 기약분수 $\frac{b}{a}$ 로 나타낼 때 $a+b$ 의 값을 구하라. 【2003 KMO】

- (1) 242 (2) 246 (3) 251 (4) 258 (5) 263

■ Example 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 $f(x) + f(1-x) = 7$ 과 $x + f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ 를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{9}\right)$ 의
 은? 【2005 KMO】

■ 함수방정식 II 특정한 함수를 대입하여 성질을 만족하는지 알아본다.

- (i) 상수함수
 (ii) $f(x) = x, f(x) = -x$
 (iii) $f(x) = ax + b$
 (iv) 다항함수 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 (v) 삼각함수 $f(x) = \sin kx, f(x) = \cos kx, f(x) = \tan kx$

■ 코시(Cauchy) 함수방정식

코시(Cauchy)에 의해 알려진 다음 네 가지 형태의 함수방정식을 코시 방정식이라고 한다.

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하면 $f(x) = kx$ (단, k 는 상수)이다.

(ii) $f(xy) = f(x)f(y)$ 를 만족하면 $f(x) = x^n$ (단, n 은 실수)이다.

■ 젤센(Zesen) 함수방정식

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 를 만족하는 함수방정식을 젤센 함수방정식이라고 하고, 이 함수방정식의 해는 $f(x) = kx + f(0)$ 이다. 단, k 는 상수이다.

4. 삼각함수

■ 삼각함수의 기본공식 임의의 실수 θ 에 대하여 다음 관계가 성립한다.

(1) 역수 관계 $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(2) 상제 관계 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 제곱 관계 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

■ θ 가 임의의 실수일 때, 다음이 성립한다. 단, n 은 정수이다.

(1) 주기 공식 $\sin(2\pi n + \theta) = \sin\theta, \cos(2\pi n + \theta) = \cos\theta, \tan(2\pi n + \theta) = \tan\theta$

(2) 음각 공식 $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta, \tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3) 보각 공식 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta, \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$
 $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta, \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta, \tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$

(4) 여각 공식 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta, \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$
 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta, \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta, \tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$

■ 삼각함수의 덧셈정리 다음이 성립한다. 단, 복부호 동순이다.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

■ 2배각 공식.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha, \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

■ 사인 법칙(Sine Law) 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

■ Example 삼각형 ABC에서 $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ, a = 3$ 일 때, b 와 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

■ The 1st Cosine Law 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A$$

■ The 2nd Cosine Law 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

■ 삼각형의 넓이 삼각형 ABC의 넓이 S 는 다음과 같다.

(1) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ 이다.

(2) 헤론의 공식 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 이다.

(3) 세 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 으로 이루어진 삼각형의 넓이:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) |$$

5. 부등식

Definition 제곱근 역평균, 산술평균, 기하평균, 조화평균 n 개의 양의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대하여,

- (1) 제곱근 역평균 (SQM : Square-root Quadratic Mean) $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$
- (2) 산술평균 (AM : Arithmetic Mean) $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$
- (3) 기하평균 (GM : Geometric Mean) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
- (4) 조화평균 (HM : Harmonic Mean) $\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ (즉 역수들의 산술평균의 역이다.)

■ 제곱근 역-산술-기하-조화평균 부등식

양의 실수 a, b 에 대하여 $\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \min(a, b)$ 이 성립한다.
즉, $SQM \geq AM \geq GM \geq HM$ 이 성립한다. 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

■ 제곱근 역-산술-기하-조화평균 부등식의 확장

양의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \max(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \\ &\geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

이 성립한다 즉, $SQM \geq AM \geq GM \geq HM$ 이 성립한다. 등호는 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 일 때 성립한다.

■ **Example** 양의 실수 x, y 에 대하여, $4x^2 + \frac{y}{2x} + \frac{4}{xy}$ 의 최소값을 구하여라.

■ **Example** 양수 a, b, c 에 대하여 $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

■ **Example** 관계식 $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ 을 만족시키는 양의 실수 x, y, z 에 대하여 다음 식의 최대값을 구하여라. 【2007 KMO】

$$26x^3 + 27xyz$$

■ **Example** 관계식 $x^2 + y^2 = 2$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{15x^2}{2} + 4xy$ 의 최대값을 구하여라.

6. 재배열 부등식, 코시-슈바르츠 부등식

■ 재배열 부등식

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 이고, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 인 임의의 $2n$ 개의 실수에 대하여 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 은 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 을 적당히 재배열하여 얻은 실수들이라 하면,

$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ 이 성립한다. 등호는 a_i 가 모두 같거나, b_i 가 모두 같을 때 성립한다. 단, $i = 1, 2, \dots, n$ 이다. 이 부등식이 의미하는 것은 큰 수끼리 곱하는 경우가 항상 더 크다는 것이다.

■ **Example** 양의 실수 a, b, c 에 대하여, $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ 이 성립함을 증명하여라.

■ 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy-Schwartz Inequality)

실수 a, b, x, y 에 대하여 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 이다. 등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 일 때, 성립한다.

■ 코시 슈바르츠 부등식의 확장

실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 과 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대하여 $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

$\geq (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^2$ 이 성립한다. 등호는 $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}$ 일 때 성립한다.

■ **Example** 양의 실수 a, b, c 에 대하여 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

■ 실수 a, b 와 양의 실수 x, y 에 대하여 다음이 성립한다 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$

■ **Example** 양의 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 의 최소값을 구하여라.

7. 삼각부등식

■ 세 변과 관련된 부등식

삼각형 ABC 에서 변 BC, CA, AB 의 길이를 각각 a, b, c 라고 할 때, 다음이 성립한다.

- (1) $a+b > c, b+c > a, c+a > b$ 이다.
- (2) $a > |b-c|, b > |a-c|, c > |a-b|$ 이다.
- (3) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$ 이다.
- (4) 임의의 양의 실수 x, y, z 에 대하여 $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ 로 나타낼 수 있다.

위 네 가지 성질들을 바탕으로 삼각부등식을 직접 풀거나, 변형하여 산술-기하-조화평균부등식, 코시-슈바르츠 부등식 등을 이용하여 푼다.

■ **Example** a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이면, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ 도 삼각형의 세 변의 길이임을 증명하여라.

Part 3. Geometry Theory

1. 삼각형과 사각형의 성질

(1) 삼각형의 성질

■ **삼각형의 기본성질** 삼각형은 다음 세 조건을 만족한다.

- (1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.
- (2) 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다.
- (3) 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 다른 한 변의 길이보다 길다.

■ **삼각형의 합동조건** 다음 세 가지 조건 중 하나를 만족하면 두 삼각형은 합동이다.

- (1) (SSS합동) 대응하는 세 변의 길이가 모두 같을 때,
- (2) (SAS합동) 대응하는 두 변의 길이가 같고, 그 끼인각이 같을 때,
- (3) (ASA합동) 한 변의 길이가 같고 대응하는 양끝각의 크기가 같을 때,

■ **이등변삼각형** 두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 한다.

이등변삼각형에서 다음이 성립한다.

- (1) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.
- (2) 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.
- (3) 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

■ 삼각형 ABC 에서 $AB > AC$ 이면 $\angle C > \angle B$ 이다. 또 역도 성립한다.

■ 직각삼각형의 합동조건

두 직각삼각형이 다음 두 조건 중 하나를 만족하면, 서로 합동이다.

- (1) (RHA합동) 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 같을 때,
- (2) (RHS합동) 빗변의 길이와 다른 변의 길이가 각각 같을 때,

■ 삼각형의 닮음조건

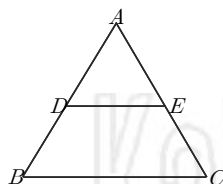
두 삼각형은 다음 세 조건 중 어느 하나를 만족하면 닮음이다.

- (1) (SSS닮음) 세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때,
- (2) (SAS닮음) 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때,
- (3) (AA닮음) 두 쌍의 대응각의 크기가 같을 때,

■ 삼각형의 선분의 길이의 비

$\triangle ABC$ 에서 BC 에 평행한 직선이 AB, AC 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 D, E 라고 하면, 다음이 성립한다.

$$(1) \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (2) \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

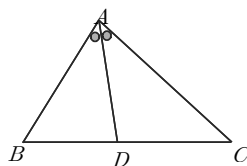


보조정리 $\triangle ABC$ 에서 D, E 가 각각 AB, AC 또는 그 연장선 위에 점일 때, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 또는

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ 을 만족하면 $DE \parallel BC$ 이다.

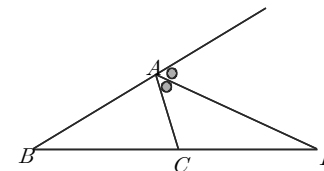
■ 내각의 이등분선의 정리

삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점을 D 라 하면, $AB:AC = BD:DC$ 가 성립한다.



■ 외각의 이등분선의 정리

삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 외각의 이등분선과 변 BC 의 연장선과의 교점을 D 라 하면, $AB:AC = BD:DC$ 가 성립한다.

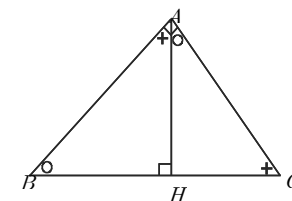


■ 삼각형의 중점연결정리 삼각형 ABC 에서 변 AB, AC 의 중점을 각각 D, E 라 하면,

$$(1) DE \parallel BC \quad (2) DE = \frac{1}{2}BC \text{ 가 성립한다.}$$

■ 직각삼각형의 닮음 삼각형 ABC 에서 $\angle A = 90^\circ$ 이고, 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 다음이 성립한다.

- (1) (피타고라스의 정리) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- (2) $AB^2 = BH \cdot BC$
- (3) $AC^2 = CH \cdot BC$
- (4) $AH^2 = BH \cdot CH$
- (5) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$



■ Example $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $AC = 3, BC = 4$ 이고, 점 C 에서 빗변 AB 에 내린 수선의 발을 D 라 할 때, CD 의 길이를 구하여라.

(2) 삼각형의 오심의 정의와 성질

■ 삼각형 오심의 정의

내심 삼각형의 내심(incenter)은 세 내각의 이등선의 교점으로 내접원의 중심이다.

외심 삼각형의 외심(circumcenter)은 세 변의 수직이등분선의 교점으로 외접원의 중심이다.

무게중심 삼각형의 무게중심(centroid)은 세 중선의 교점이다.

수심 삼각형의 수심(orthocenter)은 세 꼭지점에서 대변에 내린 수선의 교점이다.

방심 삼각형의 방심(excenter)은 한 내각의 이등분선과 다른 두 외각의 이등분선의 교점으로 방접원의 중심이다.

삼각형의 오심의 성질

■ **내심의 기본성질** (1) 내심에서 세변에 이르는 거리는 같다.

■ **내심의 기본성질** (2) 삼각형 ABC 에서 변 BC, CA, AB 의 길이를 각각 a, b, c 라고 하고, 반지름이 r 인 내접원과 변 BC, CA, AB 와의 교점을 각각 D, E, F 라고 하면, $AE=AF, BF=BD, CD=CE$ 이다.

$a+b+c=2s$ 라고 할 때, 다음이 성립한다.

(1) $AE=AF=s-a, BF=BD=s-b, CD=CE=s-c$ 이다.

(2) 삼각형 ABC 의 넓이 S 는 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$

■ **외심의 기본성질** 외심에서 세 꼭지점에 이르는 거리는 같다.

■ **꼭지각과 중심각과의 관계** 삼각형의 세 꼭지점을 A, B, C 하고, 내심을 I , 외심을 O 라 할 때,

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A, \angle BOC=2\angle A$$

■ **무게중심의 기본성질** 삼각형 ABC 에서 세 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 D, E, F 라 하자. 세 중선의 교점을 G 라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) $AG:GD=2:1, BG:GE=2:1, CG:GF=2:1$ 이다.

(2) $\triangle AGF=\triangle GFB=\triangle BGD=\triangle GDC=\triangle CGE=\triangle GEA$ 이다.

2. 사각형의 성질

■ **주요사각형의 정의 및 성질**

(1) **사다리꼴** 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

(2) **평행사변형** 두 쌍의 대변이 평행한 사각형

(3) **직사각형** 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

(4) **마름모** 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

(5) **정사각형** 네 변의 길이가 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

■ 평행사변형의 성질

임의의 평행사변형은 다음 조건을 모두 만족한다. 역으로 다음 조건 중 어느 하나만이라도 성립하면 그 사각형은 평행사변형이다.

(1) 두 쌍의 대변의 길이가 서로 같다.

(2) 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

(3) 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

(4) 한 쌍의 대변의 길이가 같고, 그 대변이 평행하다.

■ **직사각형의 성질** 직사각형은 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분한다. 그 역도 성립한다.

■ **마름모의 성질** 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다. 역으로, 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.

■ **정사각형의 성질** 정사각형의 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다. 역으로, 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 정사각형이다.

■ **볼록사각형** $ABCD$ 에서 두 대각선 AC 와 BD 의 교점을 O 라고 하자. 그러면, 사각형 $ABCD$ 는 네 개의 삼각형 ABO, BCO, CDO, DAO 로 나누어지고, $\triangle ABO \cdot \triangle CDO = \triangle BCO \cdot \triangle DAO$ 가 성립한다.

■ **Example** $AD \parallel BC$ 인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 대각선의 교점을 O 라고 하자. $\triangle AOD=20^\circ$, $\triangle OBC=80^\circ$ 일 때, $\triangle OCD$ 의 넓이를 구하여라.

■ **내각의 크기, 외각의 크기, 대각선의 총수** 볼록 n 각형에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 볼록 n 각형의 내각의 총합은 $(n-2) \times 180^\circ$

- (2) 정 n 각형의 한 내각의 크기는 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 이다.
- (3) n 각형의 외각의 합은 360° 이다.
- (4) n 각형의 대각선의 총수는 $\frac{1}{2}n(n-3)$
- (5) n 각형의 서로 다른 대각선의 수는 $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ 이다. 단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.

2. 스튜워드의 정리와 파푸스의 중선의 정리

■ **스튜워드의 정리** 삼각형 ABC 에서 BC, CA, AB 의 길이를 각각 a, b, c 라 하자. 또 점 D 가 변 BC 위의 한 점이고, AD, BD, CD 의 길이를 각각 p, m, n 이라 하자. 그러면 $b^2m + c^2n = a(p^2 + mn)$ 이 성립한다.

■ **파푸스의 중선정리** 삼각형 ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 하면, $AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + AM^2)$ 이 성립한다. 일반적으로 변 BC 를 $m:n$ 으로 내분하는 점을 D 라 하면, $nAB^2 + mAC^2 = nBD^2 + mCD^2 + (m+n)AD^2$ 이 성립한다.

■ **Example** 삼각형 ABC 에서 세 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 K, L, M 이라 하자.
 $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 200$ 일 때, $AK^2 + BL^2 + CM^2$ 의 값은? 【2005 KMO】
 (1)120 (2)135 (3)150 (4)175 (5)180

■ **Example** 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle B = 90^\circ$ 이고, 대각선 AC 는 변 CD 에 수직이고, $AB = 18$, $BC = 21$ 이고, $CD = 14$ 이다. 이 때, 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

■ **Example** 삼각형 ABC 에서 변 BC, CA, AB 의 중점을 각각 D, E, F 라 하자. 중선 AD, BE, CF 의 길이가 각각 9, 12, 15 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

■ **Example** 삼각형 ABC 에서 BC 의 중점을 M , $AB = 6$, $CA = 10$, $AM = 2\sqrt{13}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

3. 체바의 정리와 메네라우스의 정리, 변환, 등각결레점

■ 삼각형 ABC 에서, 변 BC 위에 임의의 한 점 D 를 잡자. 그러면 $\frac{\triangle ABC}{\triangle ACD} = \frac{BD}{DC}$ 가 성립한다.

즉, 높이가 일정한 삼각형의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다.

■ 삼각형 넓이의 비에 대한 정리 평행하지 않은 두 선분 AB 와 PQ 의 교점 또는 그 연장선의 교점을 M 이라고 하면, $\frac{\triangle ABP}{\triangle ABQ} = \frac{PM}{QM}$ 이 성립한다.

■ Example

$\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 위에 각 점 E, F, G 가 $AE:EB = BF:FC = CG:GA = 1:3$ 을 만족한다고 하자. 세 점 K, L, M 을 각각 선분 AF 와 CE , 선분 BG 와 AF , 선분 CE 와 BG 의 교점이라고 하자. $\triangle ABC$ 의 넓이를 1이라고 할 때, $\triangle KLM$ 의 넓이를 구하여라.

■ 반 아우벨의 정리

삼각형 ABC 내의 한 점 O 에서 만나는 세 직선 AO, BO, CO 가 대변과 각각 D, E, F 에서 교차하면

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} \text{가 성립한다.}$$

■ 게르곤네의 정리

$\triangle ABC$ 에서 내부의 한 점 O 를 잡고, O 와 꼭지점 A, B, C 를 이은 직선이 대변과 만나는 점을 각각

$$P, Q, R \text{이라 하면, } \frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = 1 \text{이다.}$$

■ 체바의 정리 (I)

삼각형 ABC 의 세 변 BC, CA, AB 위에 각각 주어진 점 D, E, F 에 대하여, 세 선분 AD, BE, CF 가 한 점에

$$\text{서 만날 필요충분조건은 } \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \text{이다.}$$

■ 체바의 정리 (II)

삼각형 ABC 의 세 변 BC, CA, AB 위에 각각 주어진 점 D, E, F 에 대하여, 세 선분 AD, BE, CF 가 한 점에

$$\text{서 만날 필요충분조건은 } \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle DAB} \cdot \frac{\sin \angle BCF}{\sin \angle EBC} \cdot \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle FCA} = 1 \text{이다.}$$

■ **메네라우스의 정리 (I)** 직선 l 이 삼각형 ABC 에서 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선과 각각 점 D, E, F 에서 만나면, $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ 이 성립한다. 역으로 위의 식이 성립하면, 점 D, E, F 는 한 직선 위에 있다.

■ **메네라우스의 정리 (II)** 직선 l 이 삼각형 ABC 에서 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선과 각각 점 D, E, F 에서 만나면, $\frac{\sin \angle AEF}{\sin \angle EFA} \cdot \frac{\sin \angle DFB}{\sin \angle BDF} \cdot \frac{\sin \angle CDE}{\sin \angle DEC} = 1$ 이 성립한다. 역으로 위의 식이 성립하면, 점 D, E, F 는 한 직선 위에 있다.

■ **Example** 삼각형 ABC 에서 변 BC 의 중점을 D , 변 AB 의 3등분점 중에서 A 에 가까운 점을 E 라 하고, AD 와 EC 의 교점을 F 라 할 때, AF 와 FD 의 비를 구하여라.

■ 데자르그의 정리

$\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 에서 세 직선 AA', BB', CC' 가 한 점 O 에서 만나고, 직선 BC 와 $B'C'$ 의 교점을 L , 직선 AC 와 $A'C'$ 의 교점을 M , 직선 AB 와 $A'B'$ 의 교점을 N 이라 하면, 점 N, L, M 은 한 직선 위에 있다.

■ **파스칼의 정리** 점 A, B, C, D, E, F 를 원주 상에 있는 임의의 점이라 하자. 현 AB 와 현 DE 의 교점을 J , 현 BC 와 현 EF 의 교점을 L , 현 CD 와 현 AF 의 교점을 K 라 하면, 점 J, K, L 은 한 직선 위에 있다.

■ **파프스의 정리** 평면에서 A, E, C 가 한 직선 위의 서로 다른 세 점이고, D, F, B 가 다른 직선 위의 서로 다른 세 점이면, 선분 AB 와 DE 의 교점 P , 선분 BC 와 FE 의 교점 Q , 선분 CD 와 AF 의 교점 R 은 한 직선 위에 있다.

4. 평행이동과 대칭이동, 합동변환

Definition **평행이동** 도형 F_1 의 각 점을 동일한 방향을 따라 동일한 거리만큼 평행이동하여 도형 F_2 를 얻는 것이다.

■ 평행이동의 성질

평행이동 전후의 도형은 다음과 같은 성질을 가진다.

- (1) 대응하는 선분이 서로 평행이며, 그 길이는 같다.
- (2) 대응하는 두 변이 각각 평행이며, 그 길이는 같다.

■ 평행성의 판정법

평면 상에 두 직선 l 과 m 은 점 C 에서 교차하고, A 와 D 는 직선 l 위의 C 가 아닌 두 점이고, B 와 E 는 직선 m 위의 C 가 아닌 두 점이다. 이 때, 선분 AB 와 DE 가 평행하기 위한 필요충분조건은

$$\frac{DA}{DC} = \frac{EB}{EC} \text{이다.}$$

■ **대칭변환(대칭이동)** 일정한 점 또는 도형을 대칭인 점 또는 도형으로 대응시키는 변환을 말한다. 선대칭 도형은 한 도형이 직선 l 에 의하여 두 부분으로 나누어지고, 두 부분이 직선 l 에 대하여 대칭일 때를 말한다.

■ 대칭변환의 성질

대칭변환은 다음과 같은 성질을 가진다.

- (1) 두 대응점을 이은 선분은 대칭축에 의하여 수직이등분된다.
- (2) 대응하는 두 선분의 연장이 만나는 점은 대칭축 위에 있다.
- (3) 점대칭이동을 짝수 번 합성하면 평행이동이다.
- (4) 점대칭이동을 홀수 번 합성하면 다시 점대칭이동이다.

■ 대칭성의 판정법

다음 두 가지 성질을 만족하면, 두 도형은 대칭이다.

- (1) 두 대응점을 이은 선분은 대칭축에 의하여 수직이등분된다.
- (2) 대응하는 두 선분의 연장이 만나는 점은 대칭축 위에 있다.

■ **회전변환** 도형 F_1 을 정점(회전중심)을 중심으로 하여 일정한 방향으로 일정한 각도(회전각)만큼 회전시켜 도형 F_2 를 얻는 것이다.

■ **회전변환의 성질** 회전변환 전후의 도형은 다음과 같은 성질을 갖는다.

- (1) 대응하는 선분들의 길이가 같고, 대응하는 각들의 크기가 같다.
- (2) 대응하는 점들의 위치배열 순서가 같다.
- (3) 대응하는 임의의 두 선분 사이에 끼인각이 회전각이다.

■ **Example** 정사각형 $ABCD$ 의 내부에 점 E 가 있다. E 로부터 세 점 A, B, C 까지의 거리의 합의 최소값이 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 이다. 이때, 정사각형 $ABCD$ 의 한 변의 길이를 구하여라.

■ 에르도르-모델의 정리

삼각형 ABC 의 변 또는 내부의 점 P 에 대하여, P 에서 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 하자. 그러면 $PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF)$ 가 성립하고, 등호는 $\triangle ABC$ 가 정삼각형이고, P 가 정삼각형 ABC 의 중심인 경우에 한하여 성립한다. 여기서, 중심은 무게중심, 내심을 의미한다. 정삼각형에서는 무게중심과 내심은 일치한다.

5. 원의 성질

(1) 원주각과 원의 성질

■ 중심각과 호, 현의 비교

한 원에서 중심각과 호, 현 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

- (1) 한 원 또는 합동인 두 원에서 같은 크기의 중심각에 대한 호의 길이와 현의 길이는 각각 같다. 그 역도 성립한다.
- (2) 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이는 비례한다.
- (3) 부채꼴의 중심각의 크기와 현의 길이는 비례하지 않는다.

■ 현의 수직이등분선의 성질

원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분한다. 또 현의 수직이등분선은 이 원의 중심을 지난다.

■ 현의 길이의 성질

원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다. 또, 길이가 같은 두 현은 중심에서 같은 거리에 있다.

■ 원주각과 중심각 사이의 관계

한 원에서 원주각과 중심각 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

- (1) 한 원에서 주어진 호(또는 현) 위의 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.
- (2) 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다. 또, 역도 성립한다.

■ 원의 접선의 성질

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이다. 또, 원 위의 한 점을 지나고 그 점을 지나는 반지름에 수직인 직선은 이 원의 접선이다.

■ 접선의 길이 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

■ 접선과 현이 이루는 각 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

■ 방역의 원리 (1) 한 원의 두 현 AB 와 CD 가 원의 내부에서 만나는 점을 P 라고 하면, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 가 성립한다.

■ 방역의 원리 (2) 한 원의 두 현 AB 와 CD 의 연장선이 원의 외부에서 만나는 점을 P 라고 하면, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 이다.

■ 방역의 원리(3) 원의 외부의 한 점 P 에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B 라고 하면, $PT^2 = PA \cdot PB$ 가 성립한다.

■ 네 점이 한 원위에 있기 위한 조건(1) 두 선분 AB, CD 또는 그 연장선이 점 P 에서 만나고, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 이면, 네 점 A, B, C, D 는 한 원 위에 있다.

■ 네 점이 한 원 위에 있기 위한 조건(2) $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ 이면 네 점 A, B, C, D 는 BD 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

■ 네 점이 한 원위에 있기 위한 조건(3) 선분 AB 에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점을 각각 P, Q 라고 할 때, $\angle APB = \angle AQB$ 이면 네 점 A, B, P, Q 는 한 원 위에 있다.

■ 오일러의 삼각형 정리

외접원과 내접원의 반지름이 각각 R, r 인 삼각형의 외심을 O , 내심을 I 라 하자. 이때, 선분 OI 의 길이를 d 라 하면, $d^2 = R^2 - 2rR$ 이 성립한다.

■ 삼각형 면적에 대한 오일러의 정리 점 O 는 반지름이 R 인 $\triangle ABC$ 의 외접원의 중심이고 점 M 은 삼각형 ABC 의 내부의 한 점이다. 점 M 에서 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 하면, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}$ 이다.

(2) 원과 사각형

■ 사각형의 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 내대각이라고 한다.

■ 원에 내접하는 사각형 사각형 $ABCD$ 가 한 원에 내접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- (1) 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.
- (2) 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다.
- (3) 임의의 한 변에서, 나머지 두 점을 바라보는 각이 같다. 변 AB 에서 점 C 을 바라보는 각이 $\angle ACB$, 점 D 를 바라보는 각이 $\angle ADB$ 라고 할 때, $\angle ACB = \angle ADB$ 이다.
- (4) 두 대각선의 교점을 P 라고 하면 $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ 이다.
- (5) 두 대변 AD 와 BC (또는 AB 와 CD)의 연장선의 교점을 P 라 할 때, $PA \cdot PD = PB \cdot PC$ 또는 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 이다.
- (6) 네 꼭지점에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.
- (7) 네 변의 수직이등분선 한 점이 만난다.
- (8) (톨레미의 정리) $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ 이다.

■ Example $\angle A = 72^\circ$ 인 삼각형 ABC 의 내부의 점 M 에 대하여 $\angle BMC = 148^\circ$ 이다. 점 M 에서 세 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 할 때, $\angle FDE$ 의 크기는 얼마인가? 【2005 KMO】

- (1) 74° (2) 76° (3) 78° (4) 80° (5) 82°

■ Example 삼각형 ABC 에서 $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$ 이다. 점 A 에서 변 BC 에 그은 수선과 점 B 에서 변 AC 에 그은 수선의 교점을 P , 삼각형 ABP 의 외접원과 변 AC 의 교점 중 A 가 아닌 점을 Q 라고 할 때, $\angle PQC$ 의 크기는? 【2005 KMO】

■ 톨레미의 정리

원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 의 대변의 길이의 곱을 합한 것은 대각선의 길이의 곱과 같다. 즉, $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ 가 성립한다.

■ 톨레미 정리의 역

불록사각형에서 두 쌍의 대변의 곱의 합이 두 대각선의 곱과 같으면 그 사각형은 원에 내접한다. 즉, 불록사각형 $ABCD$ 에서 $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ 이 성립하면, 사각형 $ABCD$ 는 원에 내접한다.

■ Example 점 B 에서 중심이 O 인 원에 그은 두 접선의 접점이 각각 N, K 이다. 선분 NO 의 연장선과 선분 BK 의 연장선이 점 E 에서 만나고, 점 E 에서 이 원에 그은 또 다른 접선의 접점이 M 이다. $BN = 4, NE = 3$ 일 때, $5KM$ 의 값을 구하여라. 【2006 KMO】

■ 심슨의 정리 삼각형 ABC 의 외접원 위에 있는 임의의 한 점 P 에서 삼각형의 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 하자. 그러면, F, D, E 는 한 직선 위에 있다. 여기서, 직선 FDE 를 점 P 에 대한 심슨선이라고 한다.

■ 심슨의 정리의 역

한 점을 지나 삼각형의 세 변에 그은 수선의 발이 한 직선 위에 있으면 그 점은 삼각형의 외접원 위에 있다.

■ 브라마굽타의 공식 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 의 대각선이 서로 직교할 때, 그 교점 O 에서 한 변 BC 에 그은 수선 OE 의 연장선을 BC 의 대변 AD 를 이등분한다.

■ 원에 외접하는 사각형

사각형 $ABCD$ 가 한 원에 외접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- (1) (듀란드의 문제) $AB + CD = BC + DA$ 이다.
- (2) 네 변에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.



(3) 네 각의 이등분선이 한 점에서 만난다.

■ **Example** 오각형 $ABCDE$ 가 원에 내접해 있다. 선분 AC 와 선분 BE 의 교점을 X , 선분 AD 와 선분 EC 의 교점을 Y 라 하자. $\angle AXB = \angle AYC = 90^\circ$ 이고, $BD = 100$ 일 때, XY 의 값을 구하여라.

■ **Example** 원에 내접하는 $\triangle PQR$ 은 $PQ = PR = 3, QR = 2$ 인 이등변삼각형이다. 원 위의 점 Q 에서 접선과 PR 의 연장선과의 교점을 X 라 하자. 이 때, RX 의 길이를 구하여라.

■ **Example** $\angle A = 72^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 의 내부의 점 M 에 대하여 $\angle MBC = 148^\circ$ 이다. 점 M 에서 세 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 할 때, $\angle FDE$ 의 크기를 구하라.

Kaigen Mathematics

*Be as proud of Kaigen,
As Kaigen is proud of you.*

