수정 : 2012. 12. 21.

전기공학을 위한 디딤돌

한국전기연구원 HVDC연구본부 전력기기연구센터
정진교(jkchong@keri.re.kr)
http://blog.daum.net/chongjinkyo

머리말

2010년 TV 광고문구 중에 다음과 같은 것이 있었습니다. “부모는 멀리 보라하고, 학부모는 앞만 보라합니다. 부모는 꿈을 꾸라하고, 학부모는 꿈을 꿀 시간을 주지 않습니다. 당신은 부모입니까, 학부모입니까?”

왜, 멀리 보라고 할까요. 왜 꿈으로 가지라고 할까요. 하지만, 무위도식(無爲徒食:하는 일 없이 놀고먹음)하는 상황이라면, 부모가 하는 말이든 학부모가 하는 말이든 들리지 않을 것이기 때문에 소용이 없을 것입니다.

2010년 tvN 방송사에서는 “80일 만에 서울대 가기”라는 프로그램을 방송하였습니다. 방송의 핵심은 모든 교육 과목의 기출문제에 대하여 총괄적으로 철저하게 이해하고 분석하라는 것입니다. 그렇다면 왜! 그토록 고생해서 서울대를 가려고 할까요.

하나의 통계가 있습니다. 해마다 하버드 대학에 진학하는 진학률이 가장 높은 나라가 대한민국이고, 또한 낙제학생 비율이 가장 높은 나라도 대한민국이라는 것 입니다.

왜, 그럴까요. 가장 핵심적인 이유는 인생의 목표가 하버드 대학에 입학하는 것이었기 때문입니다. 하버드 대학에 입학함으로써 인생의 목표를 이루었기 때문에 대학생활에서는 인생의 의미를 찾지 못하고 방황을 하기 때문입니다.

위에서 설명한 것들의 핵심은 “인생의 꿈”을 가지라는 것입니다. 즉, “인생의 목표”를 정하라는 것입니다. 그러면 인생의 목표만 정하면 끝일까요. 아닙니다. 인생의 목표를 정한 때가 바로 시작점입니다. 인생의 목표를 정하면, 인생의 목표를 달성하기 위하여 무엇을 해야 하는지, 어떻게 해야 하는지 방법이 보이기 시작하기 때문입니다.

“늦었다고 생각할 때가 가장 빠를 때이다.” 라는 말이 있습니다. 과연 그럴까요? 늦었다고 생각할 때는 늦은 때입니다. 그때부터라도 시작하면 그나마 다행이라는 뜻을 가지는 것입니다.

미국의 철학자 윌리엄 제임스는 다음과 같이 말했습니다. “생각이 바뀌면 습관이 바뀌고, 습관이 바뀌면 행동이 바뀌고, 행동이 바뀌면 인생이 바뀐다.”라고, 하지만, 저는 “생각이 바뀌면 의지를 가지고 행동을 바꿔야 한다.”라고 말하고 싶습니다. 생각을 바꾸는 것도 힘든 일이지만, 생각이 바뀐다고 습관이 바뀌지 않기 때문입니다. 무한한 노력을 통하여 행동을 바꾸어야 하기 때문입니다. 인생의 목표를 정하고 그 목표를 이루기 위하여 최선의 노력을 다한 인생이었다면 후회없는 삶을 살았다고 확신할 수 있겠습니다.

스스로 고민하라 !

전기공학을 전공하고 있는 대부분의 학생들은 자연계에 존재하는 전기의 실체도 모르면서 그저 관련 수식만을 전개시켜 나감으로써 전기공학의 학문을 배우고 있는 실정입니다. 시간이 점점 지나면서 과목의 난이도가 높아지면 특히, 전자기학과 관련된 교과목의 경우, 관련 수식만을 외워 졸업을 하고나서 사회에 진출하는 경우가 많은 것 같습니다.

불가능에 도전할 때, 답이 보인다 !

개인적으로 짧은 지식이지만 전기공학을 전공하는데 있어서 반드시 알아야 할 내용으로 전기공학의 학습지침서를 만들고자 하는 마음에서 이 글을 쓰게 되었습니다. 이 글은 전기공학을 전공하는 학부생들을 대상으로 합니다. 내용에 많은 오타가 있을 것으로 추정되며, 또한 같은 내용이 반복되어 기술되어 있습니다. 향후, 내용의 수정, 교정 그리고 내용상 부족한 점은 계속 보충해 나갈 예정입니다. 문제점에 대한 많은 지적을 부탁드립니다.

본 서는 총 4장으로 구성되어 있는데 내용을 간단하게 설명하면 다음과 같습니다. 먼저 1장에서는 전기공학을 배우기 전에 기본적으로 알아두어야 할 수학에 대하여 정리를 하였습니다. 다음으로 2장에서는 전기공학의 핵심과목이라고 할 수 있는 전자기학과 관련된 내용을 정리하였습니다. 전자기학의 전 분야를 다루는 것이 아니라 전자기학을 공부하는데 있어서 반드시 알아야 할 내용만을 선정하여 기술하였습니다. 3장에서는 회로해석 분야와 관련된 내용을 설명하였습니다. 마지막으로 4장에서는 전기공학에서 사용되는 용어들에 대하여 추가적으로 설명하였고, 전기분야에 공헌한 과학자들의 연구내용에 대하여 간단하게 설명하였습니다.

책을 쓰는데 있어서 기본적인 철학은 전기공학이라는 학문의 숲을 볼 수 있도록 하는 것입니다. 전기공학이라는 숲을 보기 위해서 저자가 지금까지 공부한 내용을 돌이켜 가장 필요로 하는 내용을 선정하여 정리하였습니다. 전기공학을 공부하기 위해서 반드시 알아야 할 내용이며, 향후, 다른 과목을 공부하는데 있어서도 반드시 도움이 될 것이라고 확신할 수 있습니다.

마지막으로 학문이나 기술을 배우고 익힌다는 뜻을 가지는 공부(工夫)라는 용어에 대하여 살펴보겠습니다. 한자를 그대로 풀이하면 工(장인공) 夫(지아비부) 즉, “장인”, “달인”이라는 뜻을 가집니다. 한자의 풀이로 보면 의미가 이상하다는 것을 느끼게 됩니다. 공부(工夫)라는 용어는 불교의 주공부(做工夫)라는 용어에서 유래된 말입니다. '주공부(做工夫)'란 '불도(佛道)를 열심히 닦는다.'는 뜻으로 특히 참선(參禪)에 전력하는 것을 말합니다. 공부(工夫)에 관한 기록은 선어록(禪語錄)에 많이 나오는데 다음과 같은 마음가짐을 가져야한다고 설명되고 있습니다.

“공부는 간절하게 해야 하며, 공부할 땐 딴 생각을 하지 말아야 하며, 공부할 땐 오로지 앉으나 서나 의심하던 것에 집중해야 한다.”

본 서가 전기공학을 공부하는 학생들에게 조금이나마 도움이 된다면, 저자로서 커다란 보람을 느낄 수 있을 것입니다.

- 저자 -

목차

1 장 전기공학을 위한 수학

수학은 왜 배울까요. 가장 기본적으로는 논리적인 사람이 되기 위해서입니다. 수학을 배우면 말을 하는데 논리가 들어있게 되고, 듣는 사람이 정확하게 내용을 이해하는 것이 가능해집니다. 이것은 수학을 학습하다보면 자연히 느끼고 깨닫게 되는 것입니다. 즉, 논리적인 사람이 되기 위하여 수학을 배우는 것이 아니라 수학을 공부하다보면 자연스럽게 논리적인 사람이 된다는 것을 의미합니다.

다음으로 수학을 배우는 이유는 자연현상에 대한 해석을 수행하고 결과를 비교분석하여 인간의 생활에 도움이 되는 물건들을 개발하기 위해서입니다. 이렇게 중요한 과목이 수학입니다. 그러면 이제부터 수학의 기본적인 내용에 대하여 정리하여 보겠습니다.

1-1 사칙연산의 의미

① 사칙연산은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등 숫자를 이용하여 계산하는 4가지 방법을 총칭하는 용어입니다.

▶ 덧셈은 다음과 같은 의미를 가집니다. 즉, 일차원 단위길이 1의 크기를 기준하여 상대적인 크기를 계산하는 것입니다.

1+1=2는 단위길이 1에 단위길이 1만큼 더하면 단위 길이의 2배가 된다는 것을 의미합니다.

0.5+1=1.5는 단위길이 1의 0.5에 해당하는 길이에 단위길이 1을 더하면 단위길이의 1.5배가 된다는 것을 의미합니다.

▶ 뺄셈의 의미는 다음과 같습니다. 즉, 앞에 있는 일차원의 길이에서 뒤에 있는 일차원의 길이를 빼면 남는 길이는 단위길이와 비교하여 얼마가 되는지를 계산하는 것입니다.

1-1=0은 단위길이 1에서 같은 단위 길이 1을 빼면 0이 된다는 것을 의미합니다.

1.0-0.5=0.5는 단위길이 1에 단위길이 0.5에 해당하는 길이를 빼면 단위길이의 0.5배가 남는다는 것을 의미합니다.

▶ 곱셈은 다음과 같은 의미를 가집니다. 즉, 이차원의 단위면적 1의 크기를 기준으로 단위 면적에 대한 상대적인 면적의 크기 비율을 계산하는 것을 의미합니다.

1*1=1은 단위길이*단위길이=단위면적 1에 해당합니다.

0.5*0.5=0.25는 단위면적 1에 비하여 면적이 25%(1/4)의 크기를 가진다는 것을 의미합니다.

▶ 나눗셈의 의미는 다음과 같이 정리할 수 있습니다. 앞에 있는 수의 면적의 크기에는 뒤에 있는 수의 면적이 몇 개가 들어가게 되는지에 대하여 계산하는 것을 의미합니다.

2/1=2는 앞에 있는 수의 면적 2에는 뒤에 있는 수의 면적 1이 2개 들어갈 수 있다는 의미를 가집니다.

0.5/2=0.25는 앞에 있는 면적 0.5에는 뒤에 있는 면적 2의 0.25(25%)가 들어갈 수 있다는

것을 의미합니다.

② 사칙연산의 계산순위 및 수식계산의 의미

덧셈과 뺄셈은 1차원 단위 길이를 기준으로 하는 계산이고, 곱셈과 나눗셈은 2차원 단위 면적의 크기를 기준으로 계산을 수행하는 것이라고 생각하시면 됩니다. 그러면 사칙연산이 나열되어 있을 때의 수식 $1+2*3$와 $1*2+3$은 어떠한 방법으로 계산을 수행하여야 할까요. 사칙연산의 수식을 계산하는데 있어서 가장 중요한 것은 계산순위를 정해야 한다는 것입니다.

▶ 사칙연산의 계산순위

사칙연산의 계산순위와 관련하여 인간은 다음과 같은 계산규칙을 정의해 놓았습니다. “수식의 계산은 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 하되, 괄호를 우선으로 하고 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈보다 먼저 한다.”

예를 들어, 1+2×3의 경우 곱셈을 먼저 하여 2×3=6를 구한 다음, 1에 그 결과를 더하여 7이 라는 결과를 얻게 되는 것을 말합니다.

▶ 왜, 곱셈을 덧셈보다 먼저 하는 것으로 규칙을 정했을까요. 정답은 중위표기법과 경험에 의하여 결정된 것입니다. 중위표기법이라는 것은 두 수의 사이에 연산 기호(+, −, ×, /)를 표기하는 것으로 기호의 앞뒤에 있는 두 수를 가지고 결과를 구하라는 의미를 가집니다. 앞과 뒤 두 개의 수를 가지고 연산한다는 뜻에서 이런 연산을 “이항(二項)연산”이라 하고, 연산하려는 두 수 사이에 기호를 쓴다는 뜻에서 이런 표기법을 “중위(中位)표기법(infix notation)”이라고 합니다.

곱셈을 덧셈보다 먼저 하는 규칙은 반드시 그래야만 하는 논리적인 이유가 있다기보다는 경험적이고 역사적인 결과로서 정해진 것이라 할 수 있습니다.

▶ 수식 계산의 의미

곱셈/나눗셈으로 계산된 단위면적 크기의 비에 대한 계산결과는 덧셈/뺄셈의 수식으로 들어오면 단위면적이 아닌 단위 길이에 대하여 비교된 수로 의미가 바꾸어진다는 것에 주의해야 합니다. 아래의 예에서 의미를 알 수 있습니다.

예1) $1+2*3$의 경우, $2*3$을 계산하면 단위면적 크기 1의 6배가 됩니다. 다음으로 $1+6$의 계산은 단위길이 1에 비하여 6배 긴 단위길이를 더하라는 의미로 바뀌어 결과가 7이라는 결과를 얻게 됩니다.

예2) $1*2+3$의 경우, $1*2$를 계산하면 결과는 단위면적 크기의 2배가 됩니다. 다음으로 $2+3$의 계산은 단위길이 2배에 단위길이 3배 긴 길이를 더하라는 의미로 바뀌어 5라는 결과를 얻게 됩니다.

③ “음수와 음수의 곱은 양수가 된다.”

음수와 음수를 곱하면 양수가 되는데 그냥 그렇다고 외우고 사용하기만 했을 뿐, 그 이유를 생각해 보지 못했을 것입니다. 음수끼리 더하면 여전히 음수인데 왜 곱하면 양수가 될까요?.

음수와 음수의 곱은 도대체 무엇일까요. 음수는 무리수 ($\sqrt{2}$)보다도 더 늦게 발견되었다고 합니다. 즉, 음수의 연산을 보편적으로 받아들인 것이 무리수를 받아들인 것보다 나중인 것을 보면, 음수에 대한 거부감이 얼마나 심했는지 알 수 있을 것 같습니다. 왜 음수 곱하기 음수가 양수가 되는지에 대하여 살펴보겠습니다.

▶ 규칙성

2X2=4	1X2=2	0X2=0	-1X2=-2	-2X2=-4
2X1=2	1X1=1	0X1=0	-1X1=-1	-2X1=-2
2X0=0	1X0=0	0X0=0	-1X0=0	-2X0=0
2X-1=-2	1X-1=-1	0X-1=0	-1X-1=1	-2X-1=2
2X-2=-4	1X-2=-2	0X-2=0	-1X-2=2	-2X-2=4

위의 곱셈표에서 가로줄을 보면, 곱해지는 수를 하나씩 줄임에 따라 곱셈의 결과도 일정하게 변하게 됩니다. 세로줄을 보면 곱하는 수를 하나씩 줄임에 따라 역시 일정하게, 첫 번째 세로줄은 2씩 줄고, 두 번째 세로 줄은 1씩 줄고, 세 번째 세로 줄은 0으로 변함이 없고, 네 번째 세로 줄은 1씩 늘고, 다섯 번째 세로 줄은 2씩 늘고 있는 것을 알 수 있습니다. 이러한 규칙이 유지되게 하려면 음수에 음수를 곱하면 양수가 되는 것이 자연스럽다는 것을 알 수 있습니다.

▶ 음수와 음수의 곱이 양수가 되는 이유에 대하여 수학적으로 증명하면 아래와 같습니다.

예] $(-a)*(-b)=ab$

$(-a)*(-b)-a*b=0$

에 대하여 증명을 하시요.

증명] 주어진 식의 양변에 $a*(-b)$를 더하고 수식을 정리하면 아래와 같습니다.

$$(-a)*(-b)-a*b+a*(-b)=+a*(-b)$$
$$(-a)*(-b)-a*b+a*(-b)-a*(-b)=0$$

첫째와 셋째항의 $(-b)$를 그리고 둘째와 넷째 항에서 $(-a)$에 대해서 배분법칙을 적용하면 아래와 같이 정리됩니다.

$$((-a)+a)*(-b)+(b+(-)b)*(-a)=0$$
$$0*(-b)+0*(-a)=0$$

결과값이 0이 되므로, 음수 곱하기 음수는 양수가 되는 것을 증명할 수 있습니다.

1-2 수학의 분야(기하학, 대수학, 해석학)

　수학(數學:셈수, 배울학, mathmatics)이라는 과목은 수량 및 공간의 성질에 관하여 연구하는 학문으로 중학교와 고등학교에서 학습하는 분야는 크게 기하학, 대수학, 해석학 등 3가지 분야가 있습니다.

① 기하학(幾何學:얼마기, 어찌하, 배울학, geometry) geo-는 토지를, metry는 측량함을 뜻합니다. 고대 이집트에서 토지 측량을 위해 도형을 연구하는데서 기원했으며, 공간의 수학적 이치 즉, 수리(數理)에 대한 성질을 연구하는 수학의 한 분야로서 아래와 같은 내용이 증명될 수 있습니다.

　예 1) 삼각형에서 "삼각형 내각의 합은 180도이다."

　예 2) 직각삼각형에 피타고라스의 정의 "$a^2+b^2=c^2$" 가 성립한다.

② 대수학(代數學:대신할대, 숫자수, 배울학, algebra) al-jabr라는 아라비아어에서 유래합니다. 수학의 한 분야로 숫자 대신의 문자를 쓰거나, 수학법칙을 간명하게 나타내는 것으로 방정식의 문제를 푸는데서 시작하며 아래 같은 내용이 증명될 수 있습니다.

　예 1) 일차방정식 $ax+b=0$에서 x의 값은 $x=-b/a$

　예 2) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 x의 값은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

③ 해석학(解析學:풀해, 해부할석, 배울학, analysis) 미적분학[微積分學]을 나타내는 용어로서 오늘날 현대수학의 기초를 구성합니다. 미적분학은 17세기 I.뉴턴과 G.W.F.라이프니츠에 의해 발견되었는데, 이는 자연과학 즉, 자연현상의 해석을 수행하기 위한 목적으로 체계화된 수학 한분야로 아래와 같은 내용이 포함됩니다.

예1) 미분(微分:작을미, 나눌분, differential) 작게 나누어 계산을 수행하는 것을 의미하며 정의식은 아래와 같습니다.

미분의 정의식 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

예2) 적분(積分法:쌓을적, 나눌분, integral) 나누어진 것을 쌓아가면서 계산하는 것을 의미하며 정의식은 아래와 같습니다.

적분의 정의식 $$F(x)=\int f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_i)\Delta x$$

1-3 수학에서의 용어와 기호

수학을 공부하다 보면 많은 수학적 기호를 접하게 됩니다. 이러한 수학적 기호는 누가 언제부터 사용하기 시작하였는지에 대하여 한번쯤은 고민해 보았겠지만, 공식을 외우고 문제를 풀면서 언제부터 인지 자신도 모르게 그냥 외워서 사용하는 동안 자연스럽게 익숙해져버린 것들을 의미합니다. 수식에 대한 설명을 하기에 앞서 많이 사용하게 되는 수학적 기호와 기초적인 수식 개념에 대하여 정리하면 아래와 같습니다.

▶ 자릿수 표현법 : 인간은 100단위에 9, 10단위에 8, 1단위에 7을 나타내는 경우에 ‘987’과 같은 형태의 자릿수 체계를 사용합니다. 이렇게 수를 표기하는 “자릿수 표현법”은 아라비아 사람에 의하여 발명되었다고 합니다. 이 자릿수 표현법은 인간이 창조한 것 중 가장 신비하고 위대한 것으로 취급됩니다.

▶ 0의 유래 : 우리가 오늘날 사용하고 있는 0은 기록에 의하면 기원전 876년 인도에서 처음으로 발견되었다고 추측하고 있습니다. 이렇게 인도에서 고안된 “0”의 기호와 자릿수 표현법이 아라비아 사람들의 손에 의해 유럽으로 전해지면서 현재 전 세계적으로 사용되고 있습니다. 그러면 0은 짝수일까요 홀수일까요. 일반적으로 0은 짝수로 취급됩니다.

▶ 음수와 허수 : 자연계에는 영을 제외한 양수 즉, 자연수만이 존재합니다. 수의 체계에서 나타나는 음수와 허수는 모두 인간이 만들어낸 수입니다. 즉, 수식의 해석을 쉽게 하기 위하여 인간이 만들어 낸 인위적인 수를 의미합니다.

▶ - 부호 : 숫자에 대한 기호 및 - 부호를 처음으로 생각해 낸 것도 인도사람이라고 추측되어 집니다. 음수에 대한 개념도 다른 수학적 개념과 함께 인도에서 유럽으로 전해졌다고 여겨집니다. 그러나 음수의 생각은 유럽에서는 좀처럼 사람들 사이에 크게 퍼지지 못했습니다. 음수의 생각이 당연한 것이라고 사람들에게 받아들여진 때는 아래의 그림과 같이 데카르트(1596-1650)가 음수를 직선위에 눈금으로 표기한 이후부터입니다.

—+—+—+—+—+—+—+—+—+—+—+—

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

▶ 허수 : 허수는 2차 방정식의 근(값)을 설명하기 위하여 아래와 같이 정의된 수로서 인간이 만들어낸 인위적인 숫자입니다.

$$i^2 \equiv -1, \qquad i = \pm\sqrt{-1}$$

정의식에서 알 수 있듯이 제곱해서 -1이 나오는 수를 i로 정의한 것으로. i는 허수(imagenary number)의 머리글자를 의미합니다. 최초로 사용한 사람은 오일러(Leonhard Euler, 1707-1

783)라고 전해집니다.

▶ 소수(素數, prime number) : 1과 자기 자신만으로 나누어지는 양의 정수를 의미하며 다음과 같은 수를 의미합니다.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

▶ 약수(約數, a divisor of a number) : 어떤 ‘수’나 ‘식’을 나누었을 때 나머지가 0이 되면 나눈 수를 나누어진 수의 약수라고 하는데 다음과 같은 예가 있습니다.

2와 3은 6의 약수이다.

동양에서는 60이라는 숫자가 많이 사용되는데 이는 아래와 같이 60의 약수가 많기 때문입니다. 즉, 다양한 수에 의하여 나누어지기 때문입니다.

60의 약수 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30

▶ 유리수 : 분수로 표시하는 것이 가능한 수를 의미합니다.

▶ 무리수 : 분수로 표시하는 것이 불가능한 수를 의미합니다. 무리수는 일반적으로 $\sqrt{\ }$라는 기호를 사용하여 표기하는데, 이 기호는 1525년에 발행된 루돌프(C. Rudolff)의 “대수”에서 처음으로 나타납니다. 이 기호는 root의 머리글자 r이 변형되었다고 전해지고 있습니다.

▶ 무한대 ∞ : 아래와 같은 내용으로 설명할 수 있습니다.

1/3 = 0.333333333　　　　양변에 곱하기 3을 하면

1 = 0.999999999

$$\lim_{9\text{의 갯수}\to\infty} 0.99999999 = 1$$

9의 자리수가 무한히 많아질 때 극한이 1이라고 말합니다. 무한대 ∞라는 기호는 무한대라는 수를 나타내는 것이 아닙니다. 무한대라는 수 ∞가 있다고 하면 아래와 같은 모순이 발생하기 때문입니다.

∞ + 3 = ∞　　양변에 -∞ 하면　　3 = 0

2 x ∞ = ∞　　양변에 /∞ 하면　　2 = 1

▶ 초월수 : 어떠한 방정식으로도 계산될 수 없는 수로서 원주율 π, 자연상수 e등이 있습니다. 원주율을 π라는 기호로 사용한 사람은 윌리암 죤스(William jones, 1765-1749)이고, 자연상수를 e라는 기호로 사용한 사람은 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)입니다.

▶ 사칙연산(四則演算, the four arithmetical operations) : 덧셈(addition,'+'), 뺄셈(subtraction,'-'), 곱셈(multiplication,'x'), 나눗셈(division,'÷')등 수를 계산하기 위한 4가지 방법을 총칭합니다.

▶ +, − : 독일의 비트만(J. Widmann)이 1489년에 과부족의 의미로 사용한 것이 오늘날 덧셈과 뺄셈의 기호로 사용되고 있습니다.

▶ 등호 = : 레코드(R. Recorde,1510-1558)의 “지혜의 지석砥石”(1557)이라는 책에 나타난 것이 최초입니다.

▶ × : 1631년 발간된 오트레드(W. Oughtred,1574-16660)의 “수학의 열쇠”라는 책에서 처음으로 사용되었습니다.

▶ ÷ : 1659년에 출간된 란(J. H. Rahn, 1622-1676)의 “대수”라는 책에서 처음으로 사용되었습니다. 추가하여 0으로 나누기를 하면 안 되는 이유는 다음과 같습니다.

6 / 2 = 3　　6 = 3 * 2
6 / 0 = ?　　6 = ? * 0 의 값을 정할 수가 없기 때문입니다.

▶ 대수(代數, algebra) : 숫자 대신에 숫자를 대표하는 일반적인 문자를 사용하여 수의 관계, 성질, 계산 법칙 따위를 표현하는 것을 의미합니다.

$$ax+b=0$$

▶ 지수(指數,exponent) : 어떤 수나 문자의 오른쪽 위에 덧붙여 그 거듭제곱을 나타내는 숫자나 문자를 의미합니다. 수식을 간단하게 표현하기 위하여 사용됩니다.

$2\times2\times2\times2\times2=2^5$, $2\times2\times3\times3\times3=2^2\times3^3$

a^2, a^3 : 데카르트(R. Descartes, 1596-1650)가 처음으로 사용하였습니다.

$a^{-\frac{1}{2}},a^{-\frac{1}{3}},\cdots,a^{\frac{1}{2}},a^{\frac{1}{3}},\cdots$와 같이 지수에 분수기호가 사용된 것은 윌리스(John Wallis, 1616-1703)와 뉴턴(Isaac Newton, 1642-1727)이후라고 전해집니다.

▶ $a^0=1$ (여기서 a는 실수) : $a^0=1$이 되는 것이 아니고 $a^0=1$이라고 약속하고 사용하는 것입니다. 약속하는 이유는 다음과 같습니다.

우선 a를 m번 곱하면 것을 표현하면 다음과 같이 됩니다.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a \times a}_{m개} = a^m$$

여기서, m과 n을 양의 정수라고 하면 다음 같은 식이 성립됩니다.

$$a^m \times a^n = a^{m+n},\ a^m \div a^n = a^{m-n}$$

여기서, m=n일 때 즉, $a^{m-n} = a^0$의 값을 정의해야 하는데 $a^m \div a^n$는 1이 되므로 $a^0 = 1$이라고 약속하여 사용하는 것 입니다.

▶ 계수(係數, coefficient) : 수와 문자로 이루어진 단항식 또는 다항식에서 지목된 문자 이외의 부분(나머지 인수 전체)을 말합니다. 예를 들어 단항식 $3ax^2$에서 3은 ax^2의 계수, 3a는 x^2의 계수라고 말할 수 있습니다.

▶ 차수(次數, degree) : 단항식(單項式)에 포함되어 있는 문자인수(文字因數)의 수를 그 단항식의 차수라고 합니다. 예를 들면 $4ax^2y^3$의 단항식에서 a에 대해서는 1차, x에 대해서는 2차, y에 대해서는 3차, x, y에 대해서는 5차, a, x, y에 관해서는 6차의 단항식이 되는 것을 의미합니다.

▶ 단항식(單項式, monomial) : 숫자와 몇 개의 문자들의 곱으로만 이루어진 식을 의미합니다. 예를 들면 $-2a$, $3abxy$, $4x^3y^2$등이 있습니다.

▶ 다항식(多項式, polynomial) : 1개 이상의 단항식을 +, - 기호를 이용하여 연결한 식을 총칭합니다. $3ax$, $5x^2$ 등과 같은 수 및 문자들을 곱하여 구성한 식을 단항식이라 하고, 이들을 덧셈 또는 뺄셈으로 연결한 $3ax+5x^2$과 같은 식을 다항식이라 합니다.

▶ 식(式, expression) 혹은 정식(定式, formula) : 숫자, 문자, 기호를 써서 단항식이나 다항식을 구성한 후, 이들 사이의 수학적 관계를 나타낸 것을 식이라 합니다.

▶ 대수식(代數式, an algebraic expression) : 유한개의 문자와 숫자의 이용하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈으로 표현한 식을 말합니다.

▶ 인수분해(因數分解, factorization) : 주어진 정수(整數) 또는 다항식(多項式)을 몇 개의 인수의 곱의 형태로 변형시키는 것을 말합니다. 예를 들면

$$ac+bc+ad+bd = (a+b)(c+d)$$

혹은

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
등이 있습니다.

▶ 등식(等式, equality) : 수나 식을 등호('=')를 써서 나타내는 관계식을 말합니다. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$와 같이 수식이 무조건 성립하는 항등식과 $x^2 + 5x + 6 = 0$와 같이 하나의 조건에서 성립하는 방정식이 있습니다.

▶ 항등식(恒等式, identity) : 항등식(恒等式)은 등식의 일종으로서 식 내부의 변수가 어떤 값을 지니든 참을 만족하는 등식을 말합니다. 항등식 가운데 중요한 것들을 “공식”이라고 합니다.

$$a+0 = 0+a = a, \qquad a-0 = a, \qquad ax+bx = (a+b)x$$

▶ 상수(常數, constant) : 변수(變數)에 대하여 그 값이 변하지 않는 불변 양(量)을 말합니다.

▶ 변수(變數, variable) : 주어진 문자가 여러 가지 값을 취할 수 있을 때, 그 문자를 변수라고 합니다. 변수가 취할 수 있는 값의 범위는 정해져 있으므로, 이 범위 내의 값을 대표하는 문자로 볼 수 있습니다. 이 때, 변수가 취하는 범위를 변역(變域)이라 합니다.

▶ 방정식(方程式, equation) : 대수방정식(代數方程式, algebraic equation)이라고도 하며, 미지수에 관한 대수식(유리식 또는 무리식)으로 이루어진 식을 말합니다. 예를 들면 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 방정식은 미지수 x가 1개, x의 차수가 2이므로 일원이차방정식이라 하며, 주어진 방정식의 해는 2와 3이 됩니다.

▶ 함수(函數, function)와 방정식(方程式, equation)

함수라는 말을 처음 수학에 도입한 것은 라이프니츠(G. W. F. Leibniz,1646-1716)이지만, $f(x)$라는 기호를 처음 사용한 것은 오일러라고 전해집니다.

함수는 현대수학에서 매우 중요한 개념으로 여러 가지의 대상들을 분류하거나 대응시킬 때에 사용합니다. 변수 x와 y 사이에서 x의 값이 정해지면 y값이 정해진다는 관계가 있을 때 y는 x의 함수라고 하며 $y = f(x)$와 같이 표기합니다. 여기서 x는 독립변수(獨立變數,independent variable), y는 종속변수(從屬變數,dependent variable)라고 합니다.

함수와 방정식은 다음과 같이 표현됩니다. 이미 알고 있는 양을 a, b라 하고, 모르는 양을 x라고 하면 미지변수는 1개가 됩니다.

1차 방정식은 $ax+b=0$ 의 형태가 되고,
1차 함수는 $f(x) = ax+b$ 의 형태가 됩니다.

방정식은 x의 값이 주어짐에 따라 $f(x)$의 값이 0으로 정해져 있으므로 등식을 만족하는 x의 값이 하나로서 정해지지만, 함수는 x의 값이 주어짐에 따라 $f(x)$의 값이 변해가므로 등식을 만족하는 경우가 무수히 많이 존재합니다. 그러므로 결과는 그래프 형태로 표현됩니다.

방정식이나 함수의 수식을 표기할 때 알파벳 문자를 사용하는데 a, b, c, d, e, ,,, 와 같이 알파벳의 앞에서부터는 알고 있는 양을 나타내고 z, y, x, w, v, ,,, 와 같이 알파벳의 뒤에서부터는 모르고 있는 양을 나타내는 의미로서 사용하는데 이러한 규칙을 처음으로 사용한 사람은 데카르트입니다.

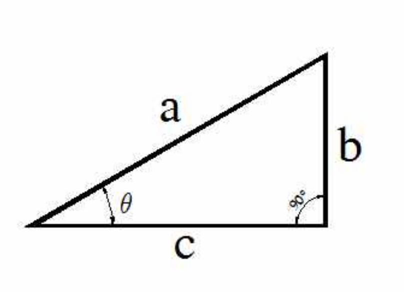
함수의 예로는 다음과 같은 것들이 있습니다.

일차함수	$y = ax + b$	(여기서 $a,\ b$는 상수)
이차함수	$y = ax^2 + bx + c$	(여기서 $a,\ b, c$는 상수)
분수함수	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	
무리함수	$y = \sqrt{4-x^2}$	
삼각함수	$y = \sin(x)$	
지수함수	$y = e^x$	변수 x가 지수자리에 위치
로그함수	$y = \log(x)$	(여기서 $a > 0$)

1-4 삼각비와 삼각함수

① 삼각비의 정의

아래와 같은 직각삼각형이 있을 때 sin, cos 그리고 tan를 길이에 대한 비로 다음과 같이 정의합니다.

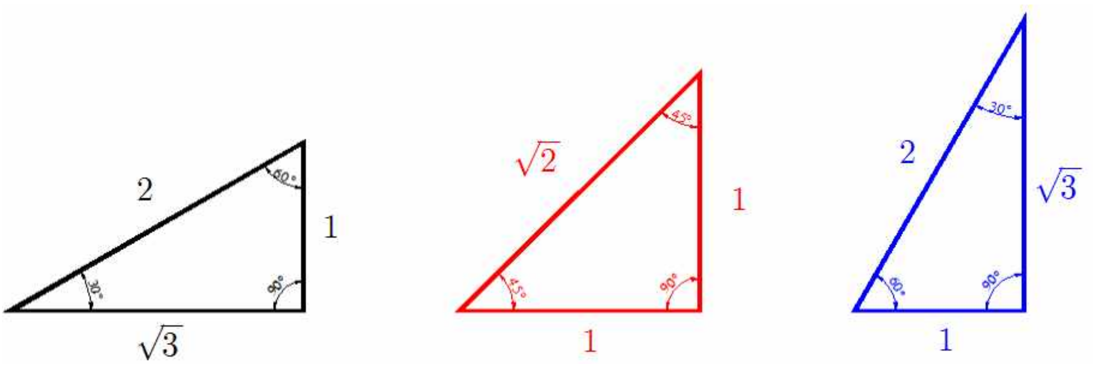


$$\sin\theta \equiv \frac{b}{a}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{c}{a}$$

$$\tan\theta \equiv \frac{b}{c} \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

아래와 같은 각도를 가지는 삼각형에서 피타고라스의 정리 $a^2 = b^2 + c^2$를 이용하여 각 변의 길이를 계산하면 다음과 같다.



삼각비의 정의식에 따라 각각의 각도에 대한 sin, cos 그리고 tan의 값을 정리하면 다음과 같다.

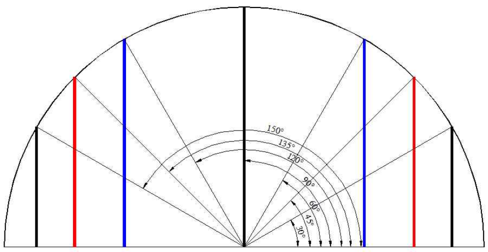
Sin
sin30 = 1/2 = 0.5
cos30 = $\sqrt{3}/2$ =0.866
tan30 = $1/\sqrt{3}$ =0.577

Cos
sin45 = $1/\sqrt{2}$ = 0.707
cos45 = $1/\sqrt{2}$ = 0.707
tan45 = 1/1 = 1

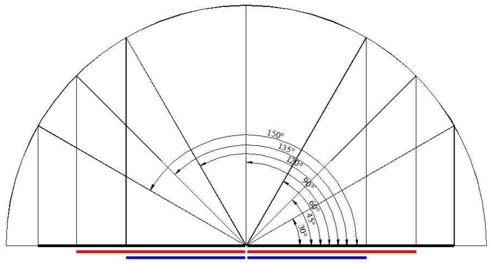
Tan
sin60 = $\sqrt{3}/2$ = 0.866
cos60 = 1/2 = 0.5
tan60 = $\sqrt{3}/1$ = 1.732

② 원으로 표현되는 삼각비

삼각비에 대한 값을 소수점의 값으로 표현하면 분모의 크기가 1이 됩니다. 이는 반지름이 1인 원을 이용하여 모든 삼각비에 대한 값을 결정할 수 있다는 것을 의미합니다. 즉, 반지름이 1인 원에서 각도가 30도, 45도, 60도, 90도, 120도, 135도 그리고 150도인 경우에 대한 sin, cos 삼각비의 값을 표현하면 아래 그림과 같습니다.



sin 삼각비의 크기



cos 삼각비의 크기

그림을 보면 sin의 삼각비에 대한 값은 세로 방향의 길이로 표현되는 것을 알 수 있고, cos의 삼각비에 대한 값은 가로 방향의 길이로 표현되는 것을 알 수 있습니다.

반지름이 1인 원을 이용하여 0도에서 360도까지 모든 각도에 대하여 삼각비의 값을 정리한 것이 아래와 같은 삼각비 표입니다.

삼각비의 표

각도	sin	cos	tan	각도	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6591	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3097	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475

③ 사분면[四分面, quadrant]

평면 위에 직교하는 x축과 y축을 그리면 평면은 네 개의 부분으로 나누어집니다. 이 때의 네 개의 평면을 사분면이라고 합니다. 좌표축은 제외한 상태에서 우상[右上]에서 반시계 방향으로 돌면서 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이라고 합니다.

제2 사분면	y	제1 사분면	
제 3 사분면		제4 사분면	x

반지름이 1인 원으로 표현되는 삼각비의 값을 살펴보면 sin의 값은 제 1사분면 그리고 제 2사분면에서 +의 값을 가집니다. 그리고 cos의 값은 제 1사분면 그리고 제 4사분면에서 +의 값을 가집니다. 이들 sin, cos, tan의 값을 고려하면 다음과 같은 용어가 생성됩니다.

$$all - \sin - \tan - \cos$$ [얼 싸 안 코]

제1사분면에서는 모든 함수의 [sin, cos, tan] 값이 양수이고, 제2사분면에서는 sin 의 값만이 양수가 되며, 제3사분면에서는 tan 의 값이 양수, 제4사분면에서는 cos의 값이 양수가 되는 것을 의미합니다.

이러한 삼각비 표는 다음과 같이 하나의 수식으로 표현할 수 있습니다.

값 $= \sin($도$)$, 값 $= \cos($도$)$, 값 $= \tan($도$)$

도의 값을 변수 x로 표현한다고 가정하면 주어진 수식은 다음과 같은 형태로 표현할 수 있습니다. 이 표기법을 간단하게 삼각함수라고 합니다.

$$f(x) = \sin(x), \qquad f(x) = \cos(x), \qquad f(x) = \tan(x)$$

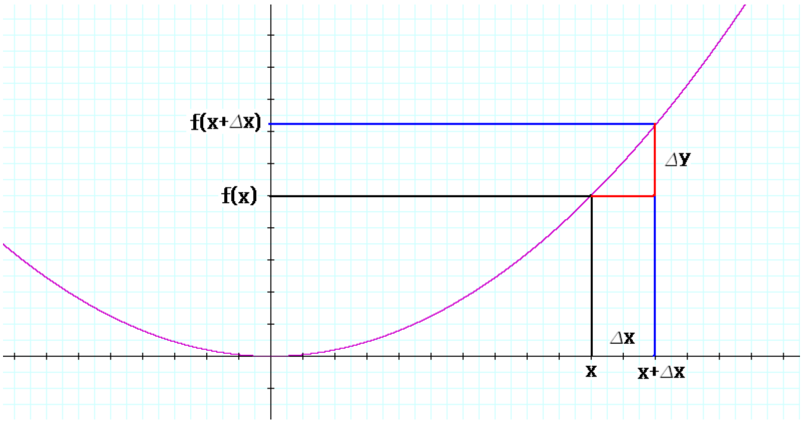
1-5 미분과 적분

① 미분(微分:작을미, 나눌분, differential)의 정의식 및 관련내용을 정리하면 아래와 같습니다.

▶ 미분의 의미

주어진 임의의 함수값에서 함수값들이 얼마나 가파르게 변하는가 즉, 함수값들의 변화율(기울기, 경사, 경도, 구배)을 계산하는 것을 의미합니다. 다른 말로 어떤 연속함수 $f(x)$의 미분계수(微分係數)나, 도함수(導函數)를 구하는 것을 미분이라고 합니다.

▶ 미분의 정의식 유도

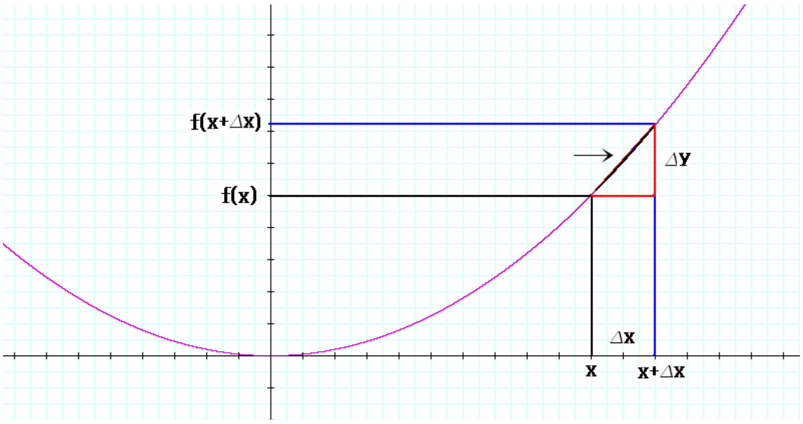


그림에서와 같이 x의 값에서 함수의 값은 $f(x)$가 되고 x에 대하여 Δx만큼 변화된 $x+\Delta x$에서의 함수의 값은 $f(x+\Delta x)$가 됩니다. 가파르기 즉, 변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$로 계산이 가능합니다. 그렇다면 그림에서 볼 수 있듯이 Δx는 $(x+\Delta x)-x$이고, Δy는 $f(x+\Delta x)-f(x)$로서 계산되는 것을 알 수 있습니다. x축에서의 변화량 Δx와 y축에서의 변화량 즉, 함수의 값에서의 변화량 Δy를 이용하여 변화율(기울기, 가파름, 경사, 변화율)은 다음과 같은 식으로 계산할 수 있습니다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-(x)} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

함수의 값이 선형적으로 변하지 않고, 비선형적으로 변하면 즉, 고차함수의 형태로 변하게 되면, Δx의 값이 크면 클수록 화살표로 표시된 영역에서의 면적이 크게 변하게 됩니다. 따라서 이러한 면적(오차)을 줄이기 위해서는 가능하면 Δx의 값을 최소화로 만들어 주어야 합니다.

추가적으로 변화율(기울기) $\Delta y/\Delta x$의 오차를 줄이기 위해서는 어떻게 하면 좋을까요. 해결방법은 동일합니다. Δx의 값을 0에 가까운 값으로 즉, 매우 작게 만드는 것입니다.



이러한 내용을 수식으로 표현하기 위하여 극한의 개념을 도입합니다. 즉, 극한의 개념을 적용하여 수식으로 표현하면 다음과 같은 미분의 정의식이 유도됩니다.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

이 미분 정의식은 아래와 같이 다양한 형태로 표기되어 사용되므로 주의하여야 합니다.

$$y' \equiv f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx를 무한히 작게함으로써 형성되는 x축 방향으로의 미소분량의 길이를 dx라고 표현한 것을 알 수 있습니다. 수식을 살펴보면 y에 대한 미분은 dy, x에 대한 미분은 dx이므로 변화율을 의미하는 dy/dx의 몫이 $f'(x)$의 형태가 되는 것을 알 수 있습니다. 그러므로 $f'(x)$는 함수 $y=f(x)$의 미분의 몫이 되므로 미분계수(微分係數, differential coefficient)라고도 말합니다.

예1] 함수 $f(x)=x^2$의 미분계수 $f'(x)$를 구하시오.
해1] 미분 정의식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

주어진 식에서 Δx의 극한 즉, Δx의 극한 값이 0에 가까이 간다고 하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있습니다.

$$f'(x) = 2x$$

예2] 함수 $f(x) = \sin x$의 미분계수 $f'(x)$를 구하시요
해2] 미분 정의식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

삼각함수의 곱의 공식

$$\sin A - \sin B \;=\; 2[\cos(\frac{A+B}{2}) \cdot \sin(\frac{A-B}{2})]$$

을 적용하면 다음과 같습니다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}]}{\Delta x}$$

분자의 2를 분모로 내리면

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

곱셈의 항을 두 개로 분리하여 정리하면

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

여기서 극한의 공식

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

을 적용하면

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

이므로, 주어진 식은

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

이 되며 Δx의 값이 무한히 0에 가까이 접근하므로 다음과 같은 최종식이 구해집니다.

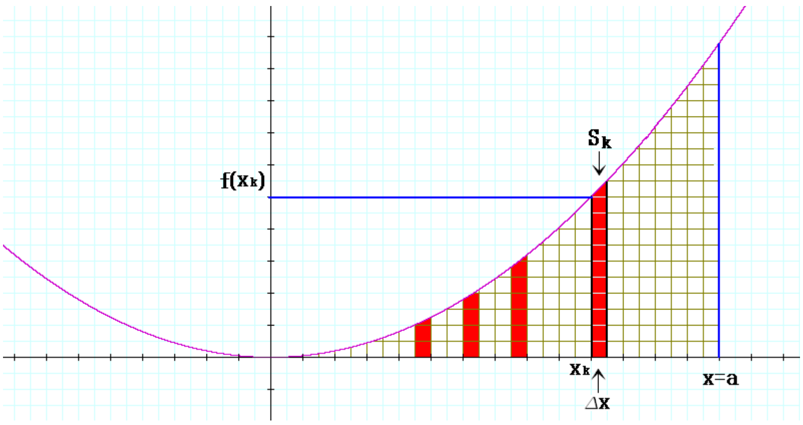
$$f'(x) = \cos x$$

② 적분(積分, 쌓을적, 나눌분, integral)의 의미 및 정의식을 정리하면 다음과 같습니다.

▶ 적분의 의미

적분은 주어진 함수의 그래프의 아래 부분과 x축에 의하여 만들어지는 영역에서의 면적을 계산하는 것을 의미합니다.

▶ 적분의 정의식



그림에서와 같이 임의의 함수 $y = f(x)$에 대하여 생각합니다. 이해를 쉽게 하기 위하여 모든 실수 x에 대한 함수 $f(x)$의 모든 값은 양수 $f(x) \geq 0$이라고 가정합니다.

$x = 0$에서 $x = a$까지 함수의 그래프에 의하여 나타나는 면적(노랑색 격자영역)을 계산하기 위하여 어떠한 방법을 이용할 수 있을까요. 노랑색 격자의 면적을 하나씩 계산하여 전부 더하

면 방법이 있고, 빨강색의 막대 형태로 면적을 계산하여 더하는 방법도 있습니다.

$x=0$에서 $x=a$까지 구간을 n개로 나누고 구간의 값을 Δx라 하면, Δx는 $(a-0)/n=a/n$이 됩니다. $x=x_k$에서의 함수의 값 $f(x_k)$에 의하여 계산되는 면적 S_k(빨강색 막대 1개의 면적)를 직각사각형의 면적공식 (높이*밑변)을 적용하여 계산하면 다음과 같이 표현됩니다.

$$S_k = f(x_k) \cdot \Delta x$$

이러한 방법으로 $x=0$에서 $x=a$까지 계산된 미소 면적의 총 갯수 n개를 모두 더하면 총 면적이 계산됩니다. 이것을 수식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$S = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

미소면적 S_k는 계산하는 방법에 따라서 오차가 발생하는데 계산의 정확도를 높이기 위한 가장 간단한 방법은 n의 값을 ∞로 증가시켜주면 면적의 오차가 최소로 작아지게 됩니다. 극한개념을 도입하여 수식으로 표현하면 다음과 같은 적분 정의식이 정리됩니다.

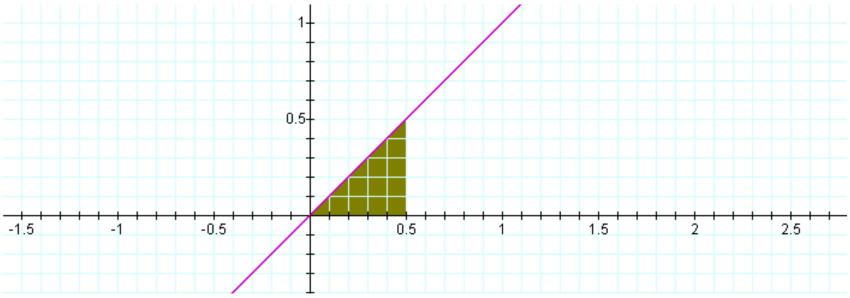
$$\int_0^a f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

임의의 폐구간$[a,b]$에서 함수 $f(x)$에 대한 정적분은 다음과 같이 표현됩니다.

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

초기 위치의 값을 $x=a$로 적용하면 $x_k = a + k\Delta x$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$의 값이 됩니다.

예1] 함수 $f(x)=x$에 대한 적분을 계산하시오.
해1] 함수 $f(x)=x$의 그래프는 다음과 같습니다.



$x=0.5$일 때 함수 $f(x)=x$에 의하여 구성되는 면적(노랑색)을 삼각형 면적공식(1/2* 밑변 *높이)을 적용하여 계산하면 $S_{x=0.5}=0.125$가 됩니다. 동일한 방법으로 몇 개의 영역에서의 적분값을 계산하여 정리하면 다음과 같습니다. 표에는 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$의 값을 추가하여 표현하였습니다.

구간	면적	$f(x)=\frac{1}{2}x^2$
x=0.2까지	S=0.02	f(x)=0.02
x=0.4까지	S=0.08	f(x)=0.08
x=0.6까지	S=0.18	f(x)=0.18
x=0.8까지	S=0.32	f(x)=0.32
x=1.0까지	S=0.500	f(x)=0.5
x=1.2까지	S=0.02	f(x)=0.02
x=1.4까지	S=0.72	f(x)=0.72
x=1.6까지	S=1.28	f(x)=1.28
x=1.8까지	S=1.62	f(x)=1.62
x=2.0까지	S=2.00	f(x)=2.00

모든 실수 x에 대하여 면적을 계산하고 값을 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$에 의하여 계산된 값과 비교하면 정확하게 일치하는 것을 알 수 있습니다.

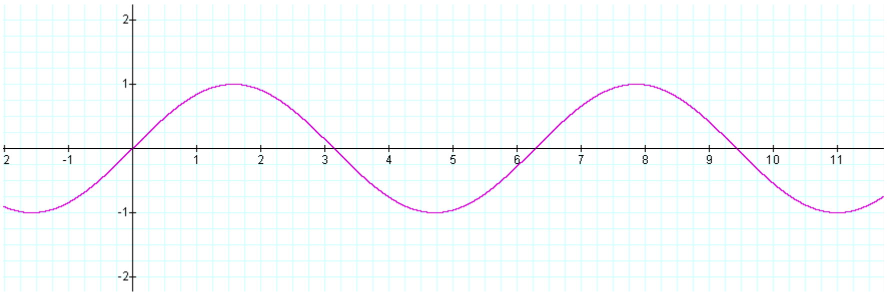
함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$의 미분계수는 $f'(x)=x$가 됩니다. 주어진 함수가 $y=x$일 때 그래프의 아래 그리고 x축에 의하여 이루어지는 면적을 계산하는 공식은 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이 됩니다.

적분에 대한 결과값으로부터 다음과 같은 결론에 도달할 수 있습니다.

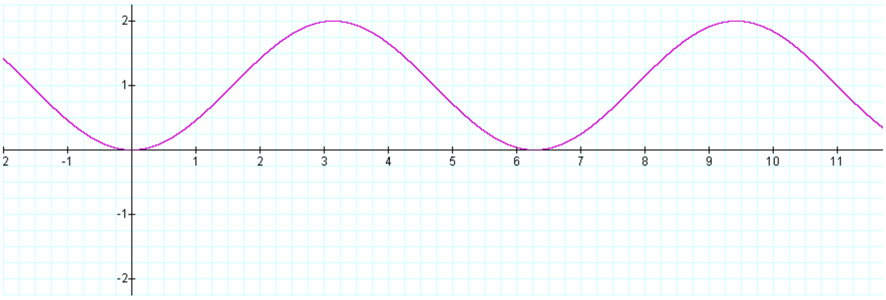
함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$는 미분계수 $f'(x)=x$ 의 역이 된다.

임의의 함수 $f(x)$에 대한 미분은 적분의 역이 된다.

예2] 삼각함수 $f(x) = \sin x$에 대한 적분을 계산하시요.
해2] 호도법(radian)을 적용하여 함수 $f(x) = \sin x$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



삼각함수 sin은 $\pi = 3.14$에서 면적이 최대가 되고 2π에서 면적이 0이 됩니다. $x = 0$에서 주어진 구간까지의 면적의 합을 계산하면 다음과 같은 형태가 됩니다.



면적을 구한 이 함수는 삼각함수 cos에 -1을 곱하고 $y = +1$만큼 이동한 그래프가 되는 것을 알 수 있습니다. 이러한 내용을 수식으로 표현하면 다음과 같습니다.

$$\int f(x) = \int \sin x \, dx$$
$$\int f(x) = -1 \cdot \cos x + 1$$

여기서 $+1$은 부정적분에서 일반적으로 표현되는 적분상수 C를 의미합니다. 만약에 100이라는 값이 있어도 미분을 하면 사라질 것이고, 500이라 값이 있어도 미분을 하면 사라집니다. 그러므로 상수의 값을 대표하는 적분상수 C라는 기호를 이용하여 표기하게 됩니다.

주어진 문제의 최종 결과는 다음식과 같아집니다.

$$\int \sin x = -\cos x + C$$

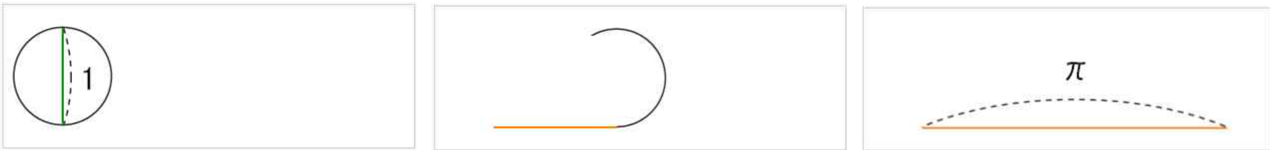
1-6 원의 면적 πr^2, 원둘레의 길이 $2\pi r$ 유도

▶ 원주율 π(파이)

원주율은 문자 그대로 원의 지름에 대한 원주(圓周, 원둘레 길이)의 비로 정의합니다.

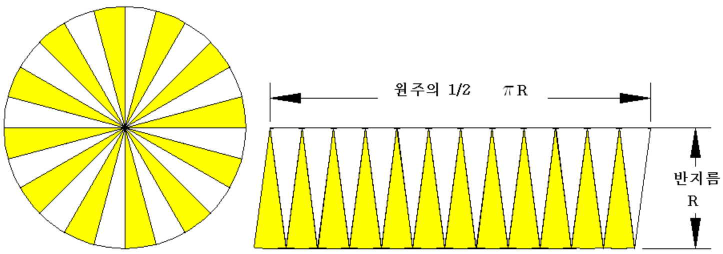
원주율 파이(π) = 원주의 길이 / 원의 지름

파이의 어원은 그리스어로 ‘둘레’를 뜻하는 ‘περιμετροζ’의 첫 글자에서 유래되었습니다. 18세기 스위스의 수학자이자 물리학자인 ‘오일러(Leonhard Euler; 1707~1783)’가 처음으로 사용하였습니다. 그림과 같이 지름이 1인 원에서 원둘레의 길이가 π 값이 되며, 3.14159265358979....의 무한소수의 값을 가집니다. π가 무리수라는 사실은 1761년에 요한 하인리히 람베르트에 의하여 증명이 되었습니다.



① 원의 면적 πr^2

원의 면적을 계산하는 식 πr^2은 적분을 이용하여 유도됩니다. 만약에 적분의 개념을 모르면 아래의 방법으로 이해할 수 있습니다.



부채꼴을 펼쳐서 짝수는 바로 배열하고 홀수는 뒤집어 배열하면 그림과 같이 됩니다. 밑변은 πr이고, 높이는 r이므로 면적은 πr^2이 되는 것을 추정할 수 있습니다. 하지만, 이것은 원주의 길이가 $2\pi r$이라는 것을 알고 있다고 가정했을 때 계산할 수 있는 방법입니다. 원주의 길이가 $2\pi r$이라는 것 또한 적분으로 계산됩니다.

▶ 원의 면적 계산식πr^2 유도

적분이론을 이용하여 계산식에 대한 유도과정을 정리하면 다음과 같습니다. 먼저, 반지름이 r인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$이 됩니다. 이 수식을 y에 대하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

원의 면적을 S라고 할 때, 원의 면적은 반원의 2배가 되므로 $+y$축에 의하여 형성되는 반원에 대한 방정식을 선택하고 적분구간을 적용한 후, 2배를 하면 원의 면적을 계산할 수 있습니다. 원의 면적에 대한 최종 결과식은 아래의 식과 같이 주어집니다.

$$S = 2 \times \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

x에 대한 적분구간은 $-r$에서 $+r$까지 입니다. 이 문제를 풀기 위해서는 다음과 같은 삼각치환법(적분변수를 삼각함수로 치환)을 적용하여야 합니다.

피적분 함수가 $\sqrt{a^2 - x^2}$일 때, $x = a\sin\theta$로 치환하면, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a\lvert\cos\theta\rvert$ 이 되고, 피적분 함수가 $\sqrt{a^2 + x^2}$일 때, $x = a\tan\theta$로 치환하면, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \tan^2\theta} = a\lvert\sec\theta\rvert$ 이 된다.

삼각치환법을 적용하기 위하여 변수치환을 하면

$$x = r\sin\theta$$

이고, $dx = r\cos\theta d\theta$
가 됩니다. 적분변수 x의 적분구간은 $-r$에서 $+r$에서 새로운 적분변수 θ 그리고 적분구간은 $-\pi/2$에서 $\pi/2$로 변경됩니다. 주어진 조건들을 대입하여 정리하면

$$S = 2 \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - (r\sin\theta)^2}\, r\cos\theta d\theta$$

$$S = 2 \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(1 - \sin^2\theta)}\, r\cos\theta d\theta$$

$$S = 2 \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2\cos^2\theta}\, r\cos\theta d\theta$$

$$S = 2 \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\, r\cos\theta d\theta$$

$$S = 2 \times r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$$

이 되고, 2배각공식 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$를 적용하면

$$S = 2 \times r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$S = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta$$

이 됩니다. 적분을 수행하고 적분구간을 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$S = r^2 * \left([\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + [\frac{1}{2} sin 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right)$$
$$S = r^2 * \left([\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin(-\pi) \right)$$
$$S = r^2\pi$$

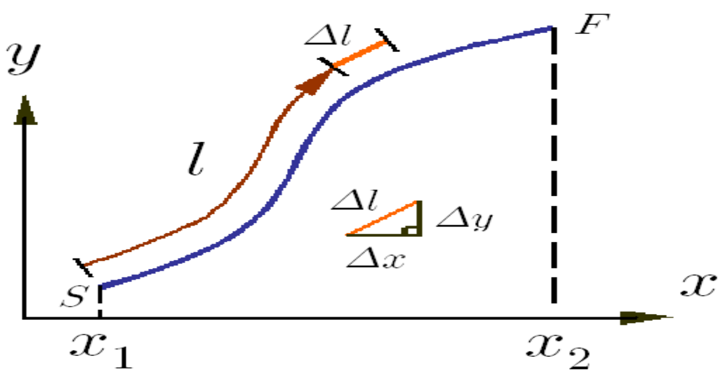
최종적으로 원의 면적을 구하는 공식은 아래와 같이 유도됩니다.

$$S = \pi r^2$$

② 원둘레 길이 $2\pi r$

임의로 주어진 곡선에서 곡선의 길이를 계산하는 방법은 작은 직선 토막들이 수없이 많이 이어져서 구성된 것이라고 가정할 수 있습니다. 바로 이 미소 길이의 직선들을 모두 합하면 원하는 곡선의 길이를 구할 수 있습니다. 정확히 말해서 “무수히 많은 작은 것들을 모두 합하여 길이를 구한다.”는 적분개념이 적용됩니다.

미세한 직선의 길이는 아래와 같은 피타고라스정리를 이용하여 계산을 할 수 있습니다.



피타고라스 정리 : $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

양변을 dx^2으로 나누면

$$(\frac{dl}{dx})^2 = 1 + (\frac{dy}{dx})^2$$

이 됩니다. 변수분리하여 정리하면

$$dl = \pm\sqrt{1+(dy/dx)^2} * dx$$

이 됩니다. 길이 계산을 적분구간을 적용하면 다음과 같은 미소길이를 계산하기 위한 최종적인 결과식이 유도됩니다.

$$L = \int_a^b dl = \int_a^b \pm\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \int_a^b \pm\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

▶ 원둘레 길이($2\pi r$) 유도

반지름이 r인 원의 방정식은 다음과 같습니다.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

원의 방정식에서 미분계수 dy/dx를 계산하면

$$2xdx + 2ydy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$(\frac{dy}{dx})^2 = (-1)^2\frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

이 되고

$$1 + (\frac{dy}{dx})^2 = \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

길이를 구하는 식 $L = \int_a^b \sqrt{(1+[f'(x)]^2)}\,dx$에 대입하면

$$L = \int_{-r}^{+r} \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}})^2}\, dx, \qquad \text{적분구간 } a = -r, \quad b = +r$$

이 됩니다. 여기서 적용된 적분구간은 $+y$축에 의하여 구성되는 반원의 길이를 계산하기 위한 정적분 영역을 의미합니다.

$$L = \int_{-r}^{+r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{(r^2 - x^2)}}\, dx$$

$$L = \int_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{(r^2 - x^2)}{(r^2 - x^2)} + \frac{x^2}{(r^2 - x^2)}}\, dx$$

$$L = \int_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{r^2}{(r^2 - x^2)}}\, dx = \int_{-r}^{+r} \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} dx$$

적분변수를 $x = r\sin\theta$, $dx = r\cos\theta\, d\theta$로 변경하면 적분변수 x의 적분구간은 $-r$에서 $+r$에서 새로운 적분변수 θ로 변경되며, 적분구간은 $-\pi/2$에서 $\pi/2$로 변경됩니다.

대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r}{\sqrt{(r^2 - (r\sin\theta)^2}} dx$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r}{\sqrt{(r^2 - (r\sin\theta)^2}} r\cos\theta d\theta$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{(r^2 - (r^2\sin^2\theta)}} d\theta$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{r\sqrt{(1 - \sin^2\theta)}} d\theta$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{r^2\cos\theta}{r\cos\theta} d\theta$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} r d\theta$$

적분한 후, 적분구간을 대입하여 계산하면

$$L = r\theta|_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$L = r(\pi/2 - (-)\pi/2)$$

$$L = \pi r$$

계산결과는 $+y$축에 의하여 구성되는 반원만을 계산하였으므로 원둘레의 총 길이를 계산하기 위한 수식은 다음과 같이 정리됩니다.

$$L_{circle} = 2\pi r$$

1-7 초월수 원주율 π

① 직각은 왜? 90도 일까요.

원에서 1회전 각도의 값을 360도로 사용하는 이유를 정리하면 다음과 같습니다. 1936년, 바빌론에서 3,200km 정도 떨어진 곳에서 서판이 발견되었습니다. 이것으로부터 수메르인들이 인류의 가장 위대한 발견인 글자를 처음으로 만들어 사용한 사람이라는 추측을 하게 되었습니다. 문자를 통하여 지식의 전달이 가능해졌고 미래로까지 그 지식이 전달될 수 있었던 것입니다. 그들은 철필로 부드러운 진흙 서판에 설형 문자를 새겨 넣었습니다. 그리고 이 서판은 햇빛 아래에서 굳혀진 것입니다. 수메르 문명은 세계에서 가장 오래된 문명으로 그들이 어디서 왔는지는 정확히 모르지만 대략 기원전 3500년경부터 수메르 지방에서 살기 시작하였읍니다.

그 후, 기원전 2000년 쯤에 메소포타미아 북쪽의 아카드지방에 살던 셈족 계통의 아카드 사람들이 수메르 지방을 점령하고 바빌로니아를 세웠습니다. 바빌로니아(Babylonia)라는 이름은 수도였던 바빌론(Babylon)에서 유래하였습니다. 바빌론에 대한 최초의 기록은 기원전 23세기경 아카드의 사르곤(Sargon) 왕의 통치시절에 만들어진 점토판에서 찾을 수 있습니다. 바빌로니아는 수메르인과 아카드인이 차례로 통치하였습니다. 이 땅은 경작이 용이하고, 상업적, 전략적으로 중요한 지형이어서 이민족의 침입을 많이 받았습니다.

바빌로니아에서는 기원전 3000년 후반부터 태음태양력(평년 12개월, 윤년 13개월)을 사용하였습니다. 기원전 529년부터 8년 3윤법(8태양년에 3윤달 적용)을 사용하였다가, 기원전 504년 이후에는 27년 10윤법을 사용하였으며, 기원전 383년부터 19년 7윤법(19태양년에 7윤달 적용)을 사용하였습니다. 이 마지막 역법은 헤브루(유대)력에 전승되어 현재까지 남아 있습니다.

기원전 6세기경이 되자 태음력을 기반으로 한 날짜가 잘 맞지 않는다는 것이 점차 알려졌습니다. 로마에서는 1년을 365일(정확히는 365.2422일)로 계산하는 태양력을 도입해야 할 필요성을 느끼게 됩니다. 그러나 문제는 지금껏 써왔던 달력을 폐기한다는 것에 대한 부담감이었습니다. 날짜가 틀려서 고치기는 해야겠는데 전통을 버리는 것이 쉽지는 않았던 모양입니다.

그래서 양력과 음력을 혼합하여 사용하였습니다. 로마에서는 4년 중 첫해는 평년으로 355일, 둘째 해는 윤년으로 378일, 셋째 해는 다시 평년으로 돌아가서 355일, 넷째 해는 윤년으로 377일을 적용하는 괴이한 달력을 채택하였습니다. 기본적으로 예전에 쓰던 태음력 기반의 날짜 체계를 지키면서도 평년과 윤년의 조합을 통해 4년 단위로는 비교적 정확한(4년을 모으면 1,465일이 되니 다시 4로 나누면 366.25일이 된다) 날짜 체계로 갈 수 있다고 생각한 것입니다.

기하학은 물체의 형상 대소·위치 등 공간에 관한 학문으로, 본래는 이집트 나일강의 범람 후 땅을 측량하게 된 데서 유래하여 「땅(geo)을 측량한다(metry)」는 의미를 가집니다.

희랍(고대 그리스)시대에 들어서면서 기하학자들은 원의 1회전에 대한 값을 정의할 필요가 생겼고, 당시 태양력 1년 365일을 기준으로 하여 원의 1회전의 값을 정하게 됩니다. 365는 홀수이므로 나누어지지 않기 때문에 가장 근사하는 360도를 1회전의 각도로 정의하였고 360/4=90으로부터 직각이 90도가 된 것입니다.

이후, 기하학은 고대 그리스의 피타고라스(Pythagoras)·아르키메데스(Archimedes) 등에 의해 이론적 기하학으로 발전했으며, 유클리드는 당시까지 알려진 “자와 컴파스”에 의한 모든

기하학을 분석하여 5개의 전제공리로부터 465개의 공리를 유도하여 기하학을 집대성한 「기하학 원론」(Element, 기원전 280년경)을 집필하였습니다.

피타고라스 [Pythagoras, BC582 ~ BC497] 그리스의 종교가·철학자·수학자. 피타고라스는 만물의 근원을 '수(數)'로 보았으며, 수학에 기여한 공적이 매우 커 플라톤, 유클리드를 거쳐 근대에까지 영향을 미쳤다. 오늘날 피타고라스의 정리의 증명법은 유클리드에 유래한 것이며, 피타고라스정리에 대한 그의 증명법은 알려져 있지 않다.

유클리드 [Euclid BC 330 ~ BC 275] BC 300년경에 활약한 그리스의 수학자. 그리스 기하학, 즉 '유클리드 기하학'의 대성자이다. 5개의 전제공리로부터 465개의 공리를 유도하였다. 그의 저서 《기하학원본》은 기하학에 있어서의 경전적 지위(經典的地位)를 확보함으로써 유클리드라 하면 기하학과 동의어로 통용되는 정도에 이르고 있다. "수학에는 왕도가 없다"라는 명언을 남겼다.

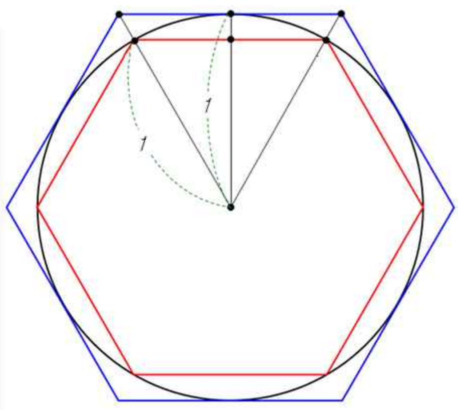
② 원주율 π의 정의 및 값의 유도

 원주율은 원의 지름과 원주(원둘레의 길이)의 비를 나타내는 것으로, 지름이 1인 원에서 원둘레 길이의 값이 됩니다. [원의 반지름이 r인 경우, 원주의 길이는 $2\pi r$]

 수학적 과정(알고리즘)을 통해 원주율(π)의 값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있는 방법을 처음으로 제시한 사람은 그리스의 수학자인 아르키메데스(Archimedes:기원전 287-212)였습니다.

아르키메데스[Archimedes, BC 287-212] 고대 그리스의 수학자 ·물리학자. '아르키메데스의 원리', "구에 외접하는 원기둥의 부피는 그 구 부피의 1.5배이다"라는 정리를 발견하였다. 지렛대의 반비례법칙을 발견하여 기술적으로 응용하였으며, 그 외의 업적으로 그리스 수학을 더욱 진전시켰다.

 그는 원에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형을 그리면, 원주(원둘레)의 길이는 이 내접다각형의 주의 길이와 외접다각형의 주의 길이 사이에 있다는 사실을 이용하여 원주의 길이를 구하고, 이로부터 원주율의 값을 계산할 수 있다고 생각하였습니다.



원에 내접하는 정다각형의 길이 < 원주의 길이 < 원에 외접하는 정다각형의 길이

빨강색의 길이 < 검정색의 길이 < 파랑색의 길이

이 방법으로 우선 원에 내접, 외접하는 정육각형을 만들고, 다음에 변의 수를 두 배씩 늘여 즉, 원에 내접, 외접하는 정십이각형, 정이십사각형, 정사십팔각형, 정구십육각형을 만들어서 원주율 π는 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ 즉, $3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$ 의 값을 가진다는 것을 증명하였습니다.

아르키메데스의 시대에서 1800년이 지난 뒤, 비에트(1540-1603)라는 프랑스 수학자는 삼각법을 연구하는 과정에서 원주율(π)와 관련하여 다음과 같은 수식을 발견하였습니다.

프랑수아 비에트 [François Vièe, 1540 ~ 1603] : 프랑스의 수학자. 1591년부터 간행하기 시작한 《해석학입문》에서 새로운 대수학을 전개하였으며, 17세기 해석기하학 전개의 기초를 확립하는 데 공헌하였다.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \cdots$$

1593년에 발표된 이 ‘무한 곱’의 표기법은 수학사에 획기적인 사건이 되었습니다. 수식의 마지막에 찍은 점 3개는 한없이 계속되고 있음을 보여주는데, 점 3개를 이용해 무한개의 계산과정을 표현하는 최초의 수학공식이었기 때문입니다.

17세기에 들어와서 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 미분적분학이 체계화되는 과정에서 원주율(π)는 무한급수를 이용하여 계산을 수행하게 되는데, 1671년 스코틀랜드 수학자 그레고리(1638-1675)는 다음과 같은 무한급수의 수식을 제시하였습니다.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\cdots$$

이 공식의 놀라운 점은 정수만으로 π의 값을 표현할 수 있음을 보여주었다는 사실입니다. 그 후 샤프(1651-1742), 오일러, 마틴(1685-1751), 라니(1660-1734)등이 무한급수를 이용하여 원주율 값을 계산하는 새로운 식을 제시하였습니다.

그레고리 [James Gregory, 1638 ~ 1675] 영국(스코틀랜드)의 수학자・발명가. 반사(反射) 망원경을 발명하고 이를 그의 저서 《Optica promota(1963)》에 수록했다. 기하학적 도형(圖形)의 면적 측정(面積測定)에 관한 독자(獨自)의 방법을 발명하여 하위헌스와 논쟁하고 또 망원경에 관하여 뉴턴과 쉴새없이 서신을 교환했다.

아이작 뉴턴 [Isaac Newton 1642.12. ~ 1727.3.] 영국의 물리학자·천문학자·수학자·근대 이론과학의 선구자. 수학에서는 미적분법을 창시하고, 물리학에서는 뉴턴역학의 체계를 확립했다. 또한 이것에 표시한 수학적 방법 등은 자연과학의 모범이 되었으며 사상면에서도 역학적 자연관은 후세에 많은 영향을 끼쳤다.

고트프리트 라이프니츠 [Gottfried Wilhelm Freiherr von Leib′niz , 1646 ~ 1716] 독일의 철학자 ·수학자 ·자연과학자 ·법학자 ·신학자 ·언어학자 ·역사가. 수학에서는 미적분법의 창시로, 미분 기호, 적분 기호의 창안 등 해석학 발달에 많은 공헌을 하였다. 역학(力學)에서는 '활력'의 개념을 도입하였으며, 위상(位相) 해석의 창시도 두드러진 업적의 하나이다.

③ 원주율(π)는 왜? 초월수일까요.

원의 정의는 "주어진 한 점에서 동일한 거리에 떨어져 있는 무한히 많은 점들의 집합"입니다. 즉, 원을 구성하는 점을 1,000개로 정하고 계산한 원주율의 값과, 점을 10,000개로 정하고 계산한 원주율의 값과 점을 100,000개로 정하고 계산한 원주율의 값에는 정확도에 분명한 차이가 있습니다. 무한히 많은 점들을 가지고 원주율을 계산하여야 하여야 정확한 값을 얻을 수 있는데, 무한대의 점을 이용하여 원주율을 계산할 수는 없기 때문입니다.

결과적으로 인간은 곡선의 길이를 정확하게 계산할 능력을 가지고 있지 못합니다. 단지 근사값만을 계산할 수 있을 뿐입니다.

1-8 초월수 자연상수 e

자연상수 e는 원주율 π, 허수 j 와 함께 수학에서 사용하는 매우 중요한 상수 중의 하나입니다. 자연상수 e는 원둘레의 길이, 원의 넓이 등과 같은 단순한 계산에 사용되는 원주율 π와 같은 상수가 아니며, 물리적인 현상의 해석이나 수식의 전개를 쉽게 하기 위해 사용되는 상수입니다.

수학적으로는 푸리에변환이나 라플라스변환의 정의에서, 물리적인 현상으로는 지수적인 수치의 감소변화를 변화를 기술하는 법칙의 경우에서 즉, 자연상수에 대한 지수승으로 표현하는 지수함수 $y=e^x$의 형태로 사용되며, 그리고 회전이나 진동과 관련된 분야에 이용되는 오일러 항등식 즉, $e^{j\theta}=\cos\theta+jsin\theta$의 형태로 사용됩니다.

17세기(1600-1699년)는 '수학의 황금시대'라고 합니다. 로그의 발견, 수학의 기호화, 좌표평면과 좌표공간의 발견, 해석기하학 도입, 수학적 확률론이 정착되었으며, 17세기 말에 가서는 미분적분학이 발견되어 현대 수학의 확고한 기틀이 마련되었기 때문입니다. 바로 이 시기에 자연상수 e가 등장했습니다. 이 수는 초등학교 수학에서는 찾아볼 수가 없습니다. 이 수는 로그함수, 지수함수, 극한, 무한급수와 어울리면서 고등학교 수학 II과정에 처음으로 등장합니다. 현대수학의 각 분야는 이 수를 절대적으로 요구했고, 자연상수 e는 현대수학의 중추적인 역할을 하고 있습니다.

자연상수 e는 자연로그의 밑이 되는 수입니다. 이 수의 값은 2.718281828.... 입니다. 로그계산법을 도입한 스코틀랜드 수학자 존 네이피어의 이름을 따 네이피어 상수 혹은 스위스 수학자 레온하르트 오일러의 이름을 따 오일러의 수라고도 불리지만, 보통은 알파벳의 영어발음을 따서 e라고 합니다. 숫자 2와 알파벳 e의 발음이 똑같은 한국어 사용자들은 분간을 위해 자연상수(자연로그의 밑이 되므로) 라고 부르기도 합니다.

역사적으로 볼 때, 자연상수 e는 복리계산 공식에서 처음으로 등장합니다. 다음으로 자연로그의 밑(=$\ln_e$)에 등장하며, 쌍곡선 함수 $y=\dfrac{1}{x}$에 대한 구적(넓이 계산) 문제에 등장합니다. 그리고 마지막으로 18세기 전반에 체계화된 지수함수의 미적분학에 등장하게 됩니다.

① 복리계산의 e

아주 먼 옛날부터 돈은 사람들의 핵심적인 관심사였습니다. 현재까지 보존된 고대의 수학문헌 중 많은 것이 이자와 관련된 문제를 다루고 있음을 보여줍니다. 기원전 1700년경으로 추정되는 메소포타미아에서 출토된 점토판에는 다음과 같은 문제가 있습니다.

" 연이율 20%에 1년마다의 복리로 계산할 때, 원리합계가 원금의 두 배가 되려면 얼마나 걸리겠는가? "

자연증가에 따른 복리법을 다른 말로 연속복리라고 합니다. 말 그대로 시시각각 이자가 붙는 상황을 말하는데, 단리계산 방법과 복리계산 방법을 정리하면 다음과 같습니다.

► 먼저 단리계산 방법을 이용하여 이자율을 계산하면 다음과 같습니다.

은행에 a를 입금하면 1년에 10%(이자율;$r=0.1$)씩 이자를 준다고 하면,

1년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar) $a+ar=a(1+r)$

2년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar) $a+ar+ar=a(1+2r)$

3년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar) $a+ar+ar+ar=a(1+3r)$

....

10년 후 원금 a원에 이자 10%(ar) $a+ar+ar+ar+...+ar=a(1+10r)$

이 됩니다. 만약에 원금 a를 100원이라고 하면, 원금 100원과 이자율을 10%를 적용하면 이자금액 (ar)은 $(ar=100*0.1=10)$이 됩니다. 결과적으로 10년이 지나면 원금의 2배가 됩니다.

$a(1+10r)=100(1+10*0.1)=200$ $r=0.1$일 때

► 동일한 조건에 대하여 복리계산 방법을 이용하여 이자율을 계산하면 다음과 같습니다.

은행에 $a(a=100\text{ 가정})$원을 입금하고 1년에 10%(이자율;$r=0.1$)씩 이자를 받는다고 가정하면, 1년 후에는 이자 10%($ar=10$원)을 받게 됩니다. 그리고 2년이 지나면 원금 $a+ar$ 즉, 110원에 이자 10%가 더해진 11원을 받게됩니다. 이러한 복리계산의 과정을 식을 정리하면 다음과 같습니다.

1년 후, 원금 a에 이자 ar이 되므로 $a+ar=a(1+r)$

2년 후, 원금 a(1+r)에 이자를 합하면 $a(1+r)+\{a(1+r)\}r=a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$

3년 후, 같은 방법을 적용하면 $a(1+r)^2+\{a(1+r)^2\}r=a(1+r)^2(1+r)=a(1+r)^3$

.....

같은 방법을 적용하면, 10년 후 총 금액은 $a(1+r)^{10}$ 이 됩니다. 만약에 원금 a를 100원이라고 가정하면, 10년 후 받게 되는 총 금액은 $100(1+0.1)^{10}$=259,3742원이 됩니다.

► 이자율의 적용기간을 1년, 6개월, 1일 단위로 줄여가면서 금액을 계산해 보면 다음과 같습니다.

1년에 이자 10%를 1 번으로 10년을 계산하면 (1년마다)

$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/1)^{10*1}$ = 2.593742*a

1년에 이자 10%를 2번으로 10년을 계산하면 (6개월마다)

$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/1)^{10*1}$ = 2.653298*a

1년에 이자 10%를 365번으로 10년을 계산하면 (1일마다)

$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/365)^{10*365}$ = 2.71791*a

1년에 이자 10%를 (365*24)번으로 10년을 계산하면 (1시간마다)

$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100\{1+0.1/(365*24)\}^{10*(365*24)}$ = 2.71826*a

단리계산에서 원금을 a라 하고 이자를 a/n 으로 계산하면 원금의 2배가 되려면 n배의 기간이 지나야 합니다. 하지만, 이자율 적용기간을 단계적으로 줄여가면서 복리로 계산하면 원금의 약 2.72배가 됩니다. 여러 가지 n의 값에 대하여 복리계산의 합계 금액을 정리하면 다음과 같습니다.

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70841
1000	2.71692
10000	2.71815
100000	2.71827
1000000	2.71828

복리계산과 관계된 식에서 이자율은 가급적이면 작게하고, 수령 횟수를 늘려주는 방법은 변수 n의 값을 무한대로 증가시켜주는 것입니다. 이러한 내용을 수식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$S=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

복리계산과 관련된 일반식 S는 이후 관심에서 멀어지게 되는데 이 수식은 이후 자연로그의 밑 e로 하는 수식 $\ln_e x$에 나타나고, 미분해도 자기 자신이 되는 지수함수 $y=e^x$에서 나타나게 됩니다.

복리계산식 S는 값이 부정형이 되는데 부정형이라는 용어에 대하여 설명하면 다음과 같습니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

여기서 $n\to\infty$일 때, $1/n$의 극한이 0의 값으로 진행한다는 것을 의미합니다. 극한 $1/n$의 값이 0이 된다는 것을 의미하는 것이 아닙니다. 수학에서 가장 일반적으로 접하게 되는 부정형으로 $0/0$, ∞/∞, $0*\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ 그리고 $\lim_{n\to 0}(1+1/n)^n$ 등이 있습니다. 모든 부정형의

식은 수치적으로 크게 만들려고 하는 양과 작게 만들려고 하는 양들 사이의 “싸움”을 의미합니다.

$(a+b)^n$에서 n의 값이 무한히 커지는 경우에 대하여 무한급수형태로 정리하면 다음과 같습니다.

$$(a+b)^n = a^n + n*\frac{a^{n-1}*b}{1!} + n(n-1)*\frac{a^{n-2}*b^2}{2!} + n(n-1)(n-2)*\frac{a^{n-3}*b^3}{3!} + \ldots$$

주어진 식의 계수항을 정리하면 다음과 표현할 수 있습니다. 이를 이항정리라고 합니다.

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_k a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

여기서, ${}_nC_k a^{n-k}b^k$을 일반항, 계수의 열 $1(={}_nC_0), {}_nC_1, {}_nC_2, \ldots, {}_nC_k, \ldots, {}_nC_{n-1}, 1(={}_nC_n)$을 이항계수라고 합니다. 복리 계산식 일반항 S를 이항정리(Binominal theorem)식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$S = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

즉, 이항정리 식에 $a=1$, $b=\frac{1}{n}$을 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$(1+1/n)^n = 1^n + n*\frac{1^{n-1}*1/n}{1!} + n(n-1)\frac{1^{n-2}*(1/n)^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{1^{n-3}*(1/n)^3}{3!} + \ldots$$

$$(1+1/n)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(\frac{n-1}{n}) + \frac{1}{3!}(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}) + \ldots$$

여기서 n이 무한히 크면

$$n \approx n-1 \approx n-2 \approx n-3 \approx n-4$$

이므로 $(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

이 됩니다.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$$

무한급수 식은 부호가 일정하기 때문에 항이 더해질수록 극한값에 더 빠르게 진행합니다.

원하는 만큼의 정확한 값은 이 급수의 항을 더 많이 더함으로써 얻을 수 있습니다.

② 자연로그 밑의 e

▶ 삼각함수로 곱셈하기

덧셈이나, 뺄셈 등의 연산은 비교적 계산이 쉬운 편에 속합니다. 하지만 두 수를 곱하거나 나누는 것은 생각보다 계산이 많이 필요합니다. 옛날 사람들은 어떻게 계산을 하였을까요?

16세기 후반에는 삼각함수를 이용한 방법이 이용되었습니다. 이러한 방법은 비티히(Paul Wittich, 1546-1586)와 클라비우스(Christopher Clavius, 1538-1612)가 개발한 방법으로 삼각함수의 덧셈 정리를 이용하여 계산을 수행하며, 계산방법은 다음과 같습니다.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

두 식을 더한 후 정리하면 다음과 같습니다.

$$\cos A * \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

예) a=57.36과 b=292.4를 곱을 구하라.

값을 구하는 것은 0.5736, 0.2924를 곱한 뒤, 100,000을 곱해주면 됩니다. 따라서 1보다 작은 두 수의 곱만 알면 계산이 가능해집니다. 편의상 양수만 생각하기로 하는데, 1보다 작은 수는 항상 어떤 수의 코사인 값이 됩니다. 삼각비 표를 뒤져 각도를 찾아보면 다음과 같습니다.

$$0.5736 = \cos 55^0, \qquad 0.2944 = \cos 73^0$$

위의 식에 대입하여 정리하면

$$0.5736 * 0.2924 = 1/2(\cos 128^0 + \cos 18^0)$$

삼각비 표를 적용하면

$$0.5736 * 0.2924 = 1/2(0.9511 - 0.6157) = 0.1677$$

그러므로 최종 결과값은

$$0.1677 * 100,000 = 16,770$$

이 됩니다.

오늘날처럼 휴대용 계산기가 없던 시절에 십진 기수법이나 소수점 표기법마저도 정착되지 않았던 시절에, 매우 큰 수를 서로 곱한다는 것은 악몽이었다는 것을 기억할 필요가 있습니다. 천문학과 관련된 숫자를 계산할 필요가 있는 천문학자들에게는 이런 계산방법이 일상다반사였기 때문에 매우 정밀한 삼각함수 표는 필수적이었습니다.

▶ 로그의 등장

16세기와 17세기 초반기에는 모든 분야에서 과학적 지식이 엄청나게 팽창하였습니다. 지리학, 물리학, 천문학은 고대의 독단에서 벗어나기 시작했고, 우주에 대한 인식을 빠르게 변화시켰습니다. 독일에서 케플러가 행성의 운동에 관한 세 가지 법칙(1609, 1619년)을 공식화함으로써 천문학은 지구중심 우주론으로부터 완전히 벗어나게 되었습니다. 이러한 발전은 수치적인 자료의 양을 엄청나게 증가시켰고, 과학자들은 지루한 수치계산에 많은 시간을 허비하도록 만들었습니다. 이러한 수치계산의 부담으로부터 과학자들을 완전히 그리고 영원히 해방시킬 수 있는 계산방법이 요구된 상황이었으며, 여기에 네이피어가 도전을 시도하였습니다.

네이피어는 두 수의 곱이나 몫의 근삿값을 작은 수의 합이나 차로 바꾸어 계산하여 구할 수 있다는 것을 발견하고 로그에 대한 이론을 체계화 하였습니다. 그리고 1619년「놀라운 로그 법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descript)」이라는 그의 저서에서 처음으로 로그의 계산법에 대하여 설명하였습니다. 또 그가 죽은 지 2년 후에 나온 「놀라운 로그 법칙의 집대성」에는 로그표의 계산법이 실려있습니다.

로그는 전 유럽의 과학자와 멀리 중국의 과학자들에게까지 빠르게 전달되었습니다. 로그를 가장 먼저 자신의 연구분야에 이용한 사람 중에는 천문학자 케플러가 있습니다. 그는 로그이론을 이용해서 행성의 궤도를 정확하게 계산하는데 성공을 거두었습니다.

당시 브리그스(1561-1631)는 런던에 있는 그레셤 대학의 기하학 교수이었는데 네이피어의 로그에 대하여 두 가지 수정사항을 제시하였습니다. 하나는 10^7이 아니라 1의 로그값을 0으로 정하는 것이었고, 다른 하나는 10의 로그값을 10의 적당한 제곱이 되도록 로그를 수정하는 것이었습니다. 수정사항을 적용하여 $\log_{10}1 = 0$, $\log_{10}10 = 1 = 10^0$이 되도록 네이피어 로그를 수정하였습니다.

양수 N을 $N = 10^L$으로 나타낼 때, L을 N의 브리그스 로그 또는 '상용'로그라고 합니다. 이것을 기호로는 $\log_{10}N$ 로서 나타냅니다. 이렇게 해서 '밑'의 개념이 탄생하였습니다. 이 결과는 브리그스가 수행하였으며, 1624년 로그산술이라는 제목으로 발표되었습니다.

네이피어 로그는 $1-10^{-7}$의 값이 1보다 작기 때문에 네이피어 로그는 수가 증가함에 따라 감소하는 반면에 이후 작성된 밑이 10인 사용로그는 그 값이 증가하는 형태가 됩니다.

케플러 법칙 [Kepler's laws] : 독일의 천문학자 요하네스 케플러(1571~1630)에 의해

유도된 행성의 운동에 관한 법칙. 케플러는 16세기 네덜란드의 천문학자였던 T. 브라헤의 관측 자료를 분석하여 1609년에는 제1법칙 · 제2법칙(면적속도 일정의 법칙)을 발표했고, 제3법칙은 약 10년이 지난 1619년에 발표했다. 케플러 제1법칙은 모든 행성은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 그리며 태양 주위를 공전한다. 제2법칙은 한 행성과 태양을 연결하는 동경 벡터는 동일한 시간 간격 동안 같은 면적을 휩쓸고 지나간다. 제3법칙은 행성의 항성주기(공전주기)의 제곱은 그 행성으로부터 태양까지의 평균거리의 세제곱에 정비례한다. 이 법칙들 가운데 특히 제2법칙은 1684~1685년 I. 뉴턴이 지구와 달 사이, 그리고 태양과 행성 사이의 중력 법칙들을 계산할 때 결정적으로 중요한 역할을 했다.

존 네이피어 [John Napier, 1550 ~ 1617.4] 영국의 수학자. 수학 ·신학 ·점성술 등을 좋아하였는데, 특히 신학에서는 열렬한 신교도로서 로마교황과 그 권위에 반대하여 《성 요한 묵시록 전체에서의 소박한 발견 A Plain Discovery of the Whole Revelation of Saint John》(1594)을 발표하였다. 또 점성술에서는 예언에 관한 저술을 하는 등 그 재능을 보였다. 특히 40여 년에 걸친 수학 연구로 산술 ·대수(代數) ·삼각법 등의 단순화 ·계열화를 꾀하였으며, 연구영역이 '네이피어 로드' 등 계산기계의 고안에까지 미쳤다. 그 중 계산의 간편화를 목적으로 한 로그의 발명은 수학사상 커다란 업적이었다.

즉, 1614년 《경이적인 로그법칙의 기술 Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio》로 로그의 성질을 명백히 하였으며, 1616년에는 H.브리그스와 협력하여 10을 밑[底]으로 하는 상용로그표를 만들기 시작했으나 완성시키기 전에 죽어 《경이적인 로그법칙의 구조》(1619)가 유고로서 출판되었고, 그 일은 브리그스에게 인계되었다. 그는 로그를 등차수열적 운동과 등비수열적 운동을 대응시켜서 발견해 냈다. 또한, 소수기호(小數記號)의 도입자로서도 알려졌다.

▶ 로그의 이론

로그는 기하급수적인 변화를 산술급수적인 변화로 바꾸어 이해하려는 시도 즉, 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈 등으로 바꾸어 좀 더 쉽게 계산하고자 하는 의도에서 출발하였습니다.

등차수열은 이웃한 항과의 차가 일정한 수열(어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수)을 나타내며, 이때의 일정한 차이를 공차라고 합니다. 등비수열은 이웃한 항과의 비가 일정한 수열을 나타냅니다. 이때 일정한 비를 '공비([common ratio, 公比, 어떤 항과 그 앞의 항에 대한 비)'라고 합니다.

다음과 같은 2^n의 거듭제곱의 관계를 살펴보기로 합니다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	..

n의 값은 등차수열을 이루고 있으며, 그에 대응되는 2^n의 값은 등비수열의 값을 이루고 있습니다. 이러한 등차수열과 등비수열 사이에는 다음과 같이 등차수열에서의 합과 차는 해당되는 등비수열의 두 항의 곱과 몫에 각각 대응됩니다.

$6+7=13$ $\qquad$ $13-7=6$

$64*128 = 8192$ $8192/128 = 64$

그리고 등차수열의 항에서의 곱과 몫은 다음과 같이 해당되는 등비수열의 거듭제곱 및 거듭제곱근의 대응관계가 성립합니다.

$2*3 = 6$ $12/3 = 4$

$4^3 = 64$ $\sqrt[3]{4096} = 16$

따라서 등비수열의 두 항을 곱하거나 나누려면 등차수열의 대응되는 항의 합이나 차를 구하여 그와 대응되는 등비수열의 항을 찾아주면 됩니다. 이와같이 등차수열과 등비수열의 관계를 이용하면 큰 수의 계산을 단순화할 수 있게 됩니다. 이러한 성질이 로가리즘(logarithm)의 이론적 배경이 됩니다.

첫 항이 1 그리고 공비가 q인 등비수열은 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$1, q, q^2, q^3, \ldots$

등비수열을 양방향으로 한없이 확장하면 다음과 같은 형태가 됩니다.

$\ldots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q^1, q^2, q^3, \ldots$

각 항의 공비는 q가 되는데, 지수가 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...와 같이 등차수열을 이루는 것을 알 수 있습니다. 다음으로 등비수열의 임의의 두 항에 대한 곱은 다음과 같이 그에 대응하는 지수들의 합을 지수로 한 값과 같습니다.

$q^2 \star q^3 = (q*q)*(q*q*q) = q^{(2+3)} = q^5$

$q^2 \star q^{-3} = (q*q)*1/(q*q*q) = q^{(2-3)} = q^{-1}$

만약 임의의 양수를 어떤 고정된 수의 거듭제곱으로 표현할 수 있다면, “수들의 곱셈과 나눗셈은 그 수들의 지수의 덧셈과 뺄셈으로 계산이 가능해 진다”는 것을 의미합니다.

▶ 네이피어 로그

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	..

등비수열을 이루는 2에 대한 거듭제곱의 값들을 살펴보면 값 사이에 숫자 간격이 너무 크

며, 없는 숫자들의 곱셈은 계산이 불가능합니다. 즉, 2^n에서의 값이 없는 $10*50$과 같은 식은 계산이 불가하다는 것을 의미합니다.

네이피어는 등비수열을 이루는 값의 차이를 줄여야 의미가 있을 것이라고 생각하였습니다. 그리하여 초항을 크게 하고 등비를 줄이기 위한 방법을 고안하였습니다. 네이피어는 공비가 1에는 가깝지만 너무 가깝지 않은 수를 합리적으로 선택하기 위하여 고심하였습니다. 당 시대에서는 삼각법 계산과 관련된 엄청난 작업을 줄이는 것이 목적이라는 것과 당시 삼각법에서 단위 원의 반지름을 $10{,}000{,}000$ 즉, 10^7 으로 나누는 관례에 따라 단위 1에서 10^{-7}을 빼면, 이 체계에서 1에 가장 가까운 수 $1-10^{-7}=0.9999999$를 얻게 됩니다. 바로 이것이 네이피어가 자신의 표를 구성하는데 사용한 공비입니다. 다음으로 초항의 값으로 네이피어는 10^7의 값을 선택하였습니다. 이것은 소수점 이하 일곱 자리의 근사값을 사용하는 대신 정수를 사용하기 위하여 선택한 값입니다. 네이피어는 이 공비의 값을 이용하여 소수이하 7자리까지 계산을 수행하여 값을 정리하였습니다.

네이피어는 반복적인 뺄셈으로 $(1-10^{-7})^L$에 대하여 L의 값이 1에서 100까지인 경우에 대하여 계산을 수행하였습니다.

$$10^7(1-10^{-7})^0=10{,}000{,}000$$
$$10^7(1-10^{-7})^1=9{,}999{,}999$$
$$10^7(1-10^{-7})^2=9{,}999{,}998$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-7})^{100}=9{,}999{,}900$$

$L=100$인 경우에는 $(1-10^{-7})^{100}=1-10^{-5}$ 식이 성립합니다. 따라서 $(1-10^{-5})=0.99999$를 새로운 비를 공비로 선택하여 $(1-10^{-5})^L$의 경우에 대하여 L의 값이 1에서 50까지에 대한 값을 20여년에 걸쳐 계산하여 결과를 정리하였습니다.

$$10^7(1-10^{-5})^1=9{,}999{,}900$$
$$10^7(1-10^{-5})^2=9{,}999{,}800$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-5})^{20}=9{,}998{,}000$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-5})^{50}=9{,}995{,}000$$

네이피어는 자신의 창조물에 처음에는 “인공 수(artificial number)”라는 용어를 사용하였다가 후에, 그리이스어의 번역어인 로가리즘(logarithm)"라는 이름을 사용하기로 결정했는데 이는 ‘ratio'와 'number'의 합성어로서 “비를 계산하는 수”라는 뜻을 가집니다.

현대적인 로그표현법을 적용하면 주어진 수 N이

$N = 10^7 (1-10^{-7})^L$

식으로 표현될 때, 지수 L을 N의 네이피어 로그라고 합니다. 네이피어 로그의 값을 소수이하 7자리까지 계산하여 정리하면 다음과 같습니다.

n	$(1-10^{-7})^n$	$10^7(1-10^{-7})^n$
0	1	10,000,000.
1	0.9999999	99,999,999.
2	0.9999998	99,999,998.
3	0.9999997	99,999,997.
4	0.9999996	99,999,996.
5	0.9999995	99,999,995.
6	0.9999994	99,999,994.
7	0.9999993	99,999,993.
8	0.9999992	99,999,992.
9	0.9999991	99,999,991.
10	0.9999990	99,999,990.
100	0.9999900	99,999,000.

n	$(1-10^{-5})^n$	$10^7(1-10^{-5})^n$
0	1	10,000,000.
1	0.9999900	99,999,900.
2	0.9999800	99,999,800.
3	0.9999700	99,999,700.
4	0.9999600	99,999,600.
5	0.9999500	99,999,500.
6	0.9999400	99,999,400.
7	0.9999300	99,999,300.
8	0.9999200	99,999,200.
9	0.9999100	99,999,100.
10	0.9999000	99,999,000.
50	0.9995000	99,950,000.

n의 값은 등차수열을 이루고 있으며, 그에 대응되는 $(1-10^{-7})^n$의 값은 등비수열의 값을 이루고 있으므로 다음과 같은 계산이 가능해집니다.

$2+5=7$
0.9999998 * 0.9999995 = 0.9999993

$9-3=6$
0.9999991 / 0.9999997 = 0.9999994

주어진 네이피어 로그식 $N=10^7(1-10^{-7})^L$를 현재의 로그식으로 변환하면 다음과 같습니다.

$$\frac{N}{10^7}=(1-10^{-7})^L$$

이므로,

$$NapLog_{(1-10^{-7})}(\frac{N}{10^7})=L$$

그러므로 $N=10^7$인 경우, $NapLog_{(1-10^{-7})}(\frac{10^7}{10^7})=0$ 이므로

$$NapLog(10^7)=\ 0$$

이 됩니다. 네이피어 로그의 식에 자연상수 e를 적용하면

$$L=\log_{(1-10^{-7})}(\frac{N}{10^7})\approx 10^7\log_{\frac{1}{e}}(\frac{N}{10^7})$$

이 됩니다. 여기서, $(1-10^{-7})^{10^7}\approx\frac{1}{e}$의 관계가 있습니다.

네이피어에 의한 로가리즘의 발견은 널리 빠르게 알려졌으며 많은 사람들에게 극찬을 받았습니다. 이후, 케플러 등 당대의 수학자들이 이 개념을 확산시키는데 크게 공헌하였습니다.

▶ 상용로그[common logarithm]

헨리 브리그스(Henry Briggs, 1561-1631)는 네이피어를 직접 찾아가 10진법을 쓰는 인간에게 편리하게 하기 위하여 1에서의 로그값이 0이 되도록 로그의 정의를 조정하자는 의견을 제시하였으며, 네이피어도 이에 동의합니다. 다만 네이피어는 병으로 인해 쇠약해 있어서, 새로운 로그표의 계산은 브리그스가 이어받게 됩니다. 브리그스는 시행착오를 거친 끝에 수 0에서의 로그값이 1이 되도록 하는 로그, 오늘날 상용로그라 부르는 로그표를 작성하기 시작합니다. 브리그스는 1617년에는 1부터 1000까지의 로그값을 필두로, 10년 뒤에는 1부터 만, 9만부터 10만까지의 자연수에 대한 상용로그의 표를 세상에 내놓습니다. 이 로그표는 3세기동안 가장 우수한 로그표로서 자리를 유지하였습니다. 브리그스의 상용로그표의 값은 다음과 같습니다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

브리그스가 제안한 상용로그는 다음과 같이 설명이 됩니다. 주어진 양의 수 N이 10^L과 같이 10의 지수승으로 표현이 된다고 하면, $L=\log N$과 서로 동치가 됩니다. 즉, 두 식은 정확하게 동일한 정보를 준다는 것을 의미합니다.

$$N=10^L \qquad\qquad L=\log_{10}N$$

▶ 로그를 이용한 계산

상용로그는 $\log_{10}x$ 와 같이 10을 밑으로 하는 로그를 의미합니다. 보통은 10을 생략하여 $\log x$로 표현합니다. 상용로그(Briggs log, $\log_{10}x$)의 관계식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\log_e a+\log_e b=\log_e(a*b)$$
$$\log_e a-\log_e b=\log_e(a/b)$$
$$n*\log_e a=\log_e a^n$$

몇가지 상용로그의 계산값을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\log_{10}1=0$$
$$\log_{10}10=1$$
$$\log_{10}100=2$$
$$\log_{10}1000=3$$

결과값으로부터 진수 x가 등비급수 (1, 10, 100, 1000, 1000)적으로 변하면, 지표 $\log x$의 값은 산술적(1,2,3,4)으로 변하는 것을 볼 수 있습니다.

그렇다면 로그개념이 왜 중요할까요? 휴대용 계산기가 없던 1970년대라고 가정하고 다음 식을 계산하고자 한다면 어떠한 방법이 있을까요

$$x = \sqrt[3]{\frac{493.8 * 23.67^2}{5.104}}$$

주어진 식은

$$x = \left(\frac{493.8 * 23.67^2}{5.104}\right)^{\frac{1}{3}}$$

와 같이 변형이 됩니다. 그리고는 하나씩($23.67 * 23.67$) 하나씩($493.8 * 560.27$) 계산을 수행하여야 합니다.

주어진 수식을 상용로그를 활용하여 계산하면 다음과 같이 정리됩니다.
양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 493.8 + 2\log 23.67 - \log 5.104)$$

이 됩니다. 상용로그표를 적용하면

$$\log x = \frac{1}{3}(2.6935 + 2 * 1.3742 - 0.7079)$$

$$\log x = 1.5780$$

이 됩니다. 역로그를 취하면

$$x = 37.84$$

이 됩니다. 이와같은 계산방법에 대하여 라플라스는 다음과 같이 말했습니다.

“ 로그의 발견은 작업량을 줄임으로써, 천문학자의 수명을 두 배로 만들었다.”

라플라스 [Laplace, Pierre Simon 1749~1827] : 프랑스의 수학자, 물리학자, 천문학자. 노르망디의 빈농 출신. 어릴 때부터 비상한 재능이 있었고, 1784년에는 에콜 노르말의 교수가 되었다. 나폴레옹 1세 하에서 내상(內相, 1799)과 백작이 되었고, 또 왕정복고 시기에 후작의 지위를 받았다(1817). 정치적으로는 입장이 불명확했다. 해석학에 뛰어나, 이것을 천체역학이나 확률론에 응용하여 많은 성과를 얻었다. 명저 『천체역학』(Mécanique céleste, 5권, 1799~1825)은 뉴튼 이래의 천체역학을 집대성하여, 태양 등 천체계에 관련된 많은 현상을 해명했다.
특히 그 섭동론(攝動論)은 천왕성 운행의 이론적 계산치의 차이를 이용하여 해왕성의 크기와 위치를 예언하고, 그 발견에 기여한 르 베리에(Urbain J. J. Le Verrier, 1811~77, 프랑스의 천문학자. 해왕성은 J.Galle에 의해 1846년 9월에 발견됨) 등의 사업의 기초를 마련했다. 또 태양계의 기원에 대해 칸트-라플라스설인 성운설(星雲說)을 완성시켰다. 그 외에도, 수학, 물리학 연구에 뛰어난 업적을 남겼다.

로그표가 발표된 후, 로그자가 발명되었습니다. 이러한 로그자는 이후 350년 동안 모든 과학자와 공학자의 충실한 동료가 되었습니다. 하지만, 1970년 초 휴대용 계산기가 시판되면서 로그자는 10년도 안되어 역사속으로 사라지게 됩니다.

► 자연로그의 정의

$a>0, a \neq 1$일 때, $x=a^y$의 표현식을 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있습니다.

$$y=\log_a x$$

a가 1이 아닌 양수일 때, 함수 y는 a를 밑, x를 진수로 하는 x에 대한 로그함수(로그함수의 값의 실수부분은 지표, 소수부분은 가수)라고 합니다. 대수방정식(對數方程式)이라는 용어는 '로그 방정식(方程式)'의 옛말을 나타냅니다. 자연로그는 로그의 정의식에서 밑 a가 $a=e$일 때, 즉, $x=e^y$, $y=\log_e x$인 경우를 말합니다. 즉, 자연로그는 밑을 e로 하는 로그를 말합니다. 자연로그의 중요성은 미적분과 관련된 부분에 상세하게 설명이 되어 있습니다.

▶ 상용로그와 자연로그의 비교

상용로그(밑=10)에서 몇 가지 지수에 대하여 계산값을 정리하면 아래의 표와 같습니다. 10의 제곱은 100이므로 100의 상용로그는 2가 됩니다. 10의 세제곱은 1000이므로 1000의 상용로그는 3이 됩니다. 그리고 10의 2.7제곱은 500이므로 상용로그는 2.7가 됩니다.

동일한 방법으로 자연로그에서 지수에 대하여 계산을 수행하면 다음과 같습니다. e의 (6.9)제곱은 1,000이므로 1000의 자연로그는 (6.9)가 되며, e의 (4.6)제곱은 100이므로 100의 자연로그는 (4.6)이고, e의 (0.7)제곱은 2이므로 2의 자연로그는 0.7가 됩니다. 상용로그와 자연로그의 값을 비교하면 다음과 같습니다.

상용로그	지수	자연로그	지수
$\log 1 = 0$	$10^0 = 1$	$\ln 1 = 0$	$e^0 = 1$
$\log 10 = 1$	$10^1 = 10$	$\ln 10 = 2.303$	$e^{2.303} = 10$
$\log 100 = 2$	$10^2 = 100$	$\ln 100 = 4.605$	$e^{4.605} = 100$
$\log 1000 = 3$	$10^3 = 1000$	$\ln 1000 = 6.908$	$e^{6.908} = 1000$
$\log 10000 = 4$	$10^4 = 10000$	$\ln 10000 = 9.210$	$e^{9.210} = 10000$
$\log 100000 = 5$	$10^5 = 100000$	$\ln 100000 = 11.513$	$e^{11.513} = 100000$

③ 쌍곡선 함수 $y = \frac{1}{x}$ 구적(적분)에서의 e

아르키메데스는 쌍곡선 함수 $y = \frac{1}{x}$에 대한 구적(그래프와 x축이 이루는 면적을 계산)을 시도했지만 실패하였습니다. 17세기에 접어들면서 몇 명의 수학자가 독자적으로 이 문제를 해결하려고 시도하였습니다. 그 중 유명한 사람이 데카르트(1596-1650)와 페르마(1601-1665)이었습니다. 이들은 파스칼과 함께 미적분학이 체계화되기 이전에 수학계를 이끈 프랑스의 위대한 삼두마차이었습니다. 이들은 쌍곡선 함수 $y = \frac{1}{x}$에 대한 구적 계산을 시도하였지만 모두 실패하였고, 1647년 벨기에의 생-빈센트와 그의 동료들에 의하여 어느 정도의 성과가 발표되었습니다.

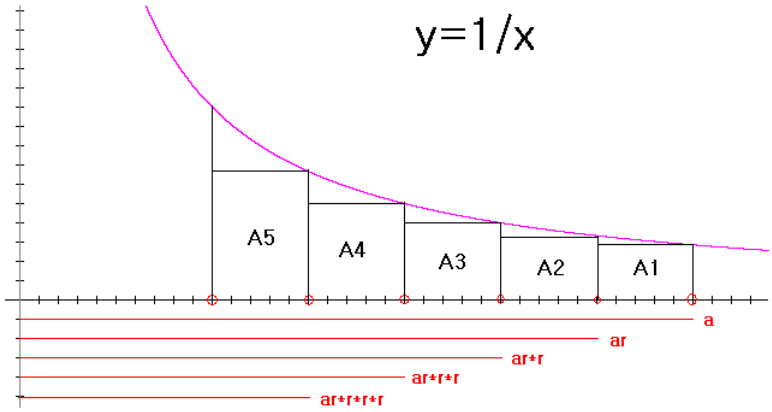
르네 데카르트 [René Descartes, 1596.3.31 ~ 1650.2.11] 프랑스의 철학자·수학자·물리학자. 근대철학의 아버지로 불리는 데카르트의 형이상학적 사색은 방법적 회의(懷疑)에서 출발한다. '나는 생각한다, 고로 나는 존재한다(cogito, ergo sum)'라는 근본원리가 《방법서설》에서 확립되어, 이 확실성에서 세계에 관한 모든 인식이 유도된다.
수학자로서는 기하학에 대수적 해법을 적용한 해석기하학의 창시자로 알려졌다. 물체에는 무게라는 실재적 성질이 있기 때문에 떨어지는 경향이 있다고 설명하는 스콜라적 자연학에 만족하지 못하고, 물리 수학적 연구를 통하여 물질, 즉 연장(延長)이라는 기계론적 자연관으로 이끌려 갔다. 그의 형이상학적 사색은 이른바 방법적 회의(懷疑)에서 출발한다.

피에르 페르마 [Pierre de Fermat, 1601.8.17 ~ 1665.1.12] 프랑스의 수학자. 17세기 최고의 수학자로 손꼽힌다. 근대의 정수 이론 및 확률론의 창시자로 알려져 있고, 좌표기하학을 확립하는 데도 크게 기여하였다.
수학을 취미로 하는 아마추어 수학자였으나 여러 방면에 획기적인 업적을 남겼으며 나중에 아이삭 뉴턴(Isaac Newton)이 미적분학에 응용하였던 극대값과 극소값을 결정하는 여러 가지 방법을 창안하였다.
그의 연구 성과 가운데 우선 미적분(微積分)에 관한 업적을 들 수 있다. 연속곡선(連續曲線)에 접선(接線)을 긋는 방법으로서 제기된 이 문제는 페르마를 '극값[極値]의 문제'로 유도하여 미분의 개념에 도달시킨 것이며, 미적분학의 창시자로 일컬어지는 뉴턴이나 라이프니츠가 태어나기 10여 년 전에 이런 성과가 얻어진 점은 주목할 만하다

파스칼[Pascal, Blaise, 1623~1662] 프랑스의 수학자, 물리학자, 발명가, 철학자, 신학자이다.
12세 때 유클리드 기하학에 몰두하여 16세에는 데자르그(Desargues)의 사영기하학(射影幾何學)을 근거로 하여 『원추곡선론』(Essai pour les coniques)을 기술하였고 그 후 1642년 계산기를 발명하였다.
파스칼은 확률론, 수론(數論) 및 기하학 등에 걸쳐서 공헌한 바가 크다. 1646년 토리첼리의 기압계 실험을 배움으로써 진공이 존재한다는 가설을 주장하였는데, 그의 진공 및 공기압력에 관한 이론은 자연에 관한 역학이론을 발전시키고 자연의 신비성을 제거하는 데 큰 몫을 했다. 즉 그는 자연탐구에 있어서는 추리나 경험보다 권위가 앞서야 한다고 했는데, 그의 과학적 견해와는 다른 경향을 보인다.

대수(로가리즘)와 쌍곡선의 관계는 세인트 빈센트(Gregory of Saint Vincent, 1584-1667)가 구적법에서 간접적으로 설명하였고, 데 사라사(Alphonso Antonio de Sarasa, 1618-1617)가 처음으로 주석을 달았습니다.

빈센트는 현대적 미적분이 아니라 구분구적법으로 $y=\frac{1}{x}$의 넓이를 계산하고자 하였습니다. 면적을 계산하는 방법을 정리하면 다음과 같습니다.



쌍곡선 함수 $y=1/x$의 그래프에서 각각의 면적을 구하면 다음과 같습니다.

$$A1=(a-ar)*1/a=a(1-r)/a=(1-r)$$
$$A2=(ar-ar*r)*1/ar=ar(1-r)/ar=(1-r)$$
$$A3=(ar*r-ar*r*r)*1/ar*r=ar*r(1-r)/ar*r=(1-r)$$
$$A4=(ar*r*r-ar*r*r*r)*1/ar*r*r=ar*r*r(1-r)/ar*r*r=(1-r)$$

x의 값이 0에서부터 일정한 (r)값 즉, 등비수열로 증가하면 그에 대응하는 넓이는 똑같은 증분 $(1-r)$ 즉, 등차수열로 구적이 증가하는 것을 알 수 있습니다. 이것은 넓이와 거리사이에 로그 관계가 있음을 단적으로 보여줍니다.

쌍곡선 함수 $y=1/x$의 구적 계산과 관련하여 그리스 사람들이 싸우기 시작한지 2000년이

지나 해결이 보이기 시작하였는데 여전히 한 가지 문제점이 남아있습니다. 변수 x에 대한 면적계산 식이 $A(x)=\log x$는 쌍곡선 함수의 구적의 문제와 관계가 있다는 것은 알았지만, 로그의 밑이 정해지지 않았기 때문에 정확하게 수치적으로 계산하는 것은 불가능합니다. 이 공식이 실용적이기 위해서는 반드시 로그의 밑을 결정해 주어야 합니다. 이러한 로그의 밑은 무한급수 그리고 미적분학의 개념을 통하여 정의됩니다.

④ 자연상수 e : 18세기 전반 지수함수의 미적분학

미분학은 변화에 관한 연구이며, 좀 더 구체적으로 말하면 "변량의 변화율"에 관한 연구입니다. 주변에서 찾아볼 수 있는 대부분의 물리현상은 시간에 따라 변화하는 양과 관계가 있습니다. 미적분학의 두 가지 기본적인 문제인 접선문제(미분)와 넓이 문제(적분)가 서로 '역'의 관계가 성립한다는 점에 있으며, 이것이 미적분학의 핵심입니다.

한 개인의 창조적인 산물로 갑자기 이 세상에 갑자기 나타난 것이 로그의 발명이라고 한다면, 수 십년동안 매우 많은 사람들의 머리 속에서 기나긴 진화과정을 거쳐 체계화 된 것이 있는데 이것이 미적분학의 발견입니다. 흔히, 미적분학은 1665년 1675년 사이에 뉴턴(1642-1727)과 라이프니츠(1646-1716)의 발견이라고 하지만, 이것이 전적으로 정확하다고 할 수는 없습니다. 미적분학이라는 의미의 "calculus" 또한 수학의 미분적분학과는 아무런 관계가 없습니다.

17세기 1684-86년 고트프리트 라이프니츠[Gottfried Leibniz, 1646~1716]는 미적분학을 처음으로 완전히 전개되고 실행 가능한 체계로 만들었습니다. 18세기가 되어서 테일러(Brook Taylor, 1685-1731), 매클로린(Colin Maclaurin, 1698-1746)등이 미적분학을 더욱 발전시켰으며, 레온하르트 오일러[Leonhard Euler, 1707~1783]는 더 나아가 변분학을 창시하였습니다.

고트프리트 라이프니츠[Gottfried Leibniz, 1646~1716] 독일 계몽철학의 서장을 연 철학자 수학에서 뉴튼과는 별도로 미적분학의 방법을 창안하였고, 물리학에서는 에너지 보존의 법칙을 예견했다. 또 지질학, 생물학, 역사학에 대해서도 연구했다. 그의 철학에 따르면, 세계는 무수히 많은 단일불가분(單一不可分)의 실체, 즉 능동적인 힘의 단위로서 자신 속에 전(全)우주를 표상하는 '우주의 거울'로서의 모나드로 구성된다고 주장하였다.

브룩 테일러 (Brook Taylor, 1685-1731) 영국의 수학자. 미분학에서 유명한 '테일러의 정리(이것을 급수로 전개한 것이 테일러 급수이다)'를 저서 《증분법(增分法) Methodus Incrementorum directa et inversa》(1715)에서 밝혔는데, 테일러의 도출(導出)로는 급수의 수렴성(收斂性)에 관한 고찰이 불충분하였다. 그 후, C.매클로린이 무한급수의 고찰로 이것을 재정식화하여 그 저서에 기술함으로써(1742), 흔히 '매클로린의 정리(또는 급수)'로도 불린다.

콜린 매클로린[Colin Maclaurin, 1698-1746] 뉴턴의 학통을 이어, 플럭션법을 연구, 미분학에 이바지하고, 이것을 기하학에 응용하였다. 급수전개에 관한 '매클로린의 정리'를 발견하여 저서 《유율법(流率法)》(1742)을 기술하였으며, 이 책에는 조석(潮汐)의 이론 등도 포함되어 있어 물리학에도 이바지하였다.

오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)는 아시아 페테르부르크의 궁정 시절, 나이 21세에 "대포의 점화에 대해서 최근 이루어진 실험에 관하여"라는 논문에서 다음과 같이 발표하였습니다.

“ 로그를 취한 값이 1인 수를 e라고 적기로 하자. 이 수는 2.7182818...이고 10을 밑으로 하는 e의 로그는 0.4342944...이다 ”

레온하르트 오일러 [Leonhard Euler 1707.4.15 ~ 1783.9.18] 스위스의 수학자·물리학자. 수학·천문학·물리학 분야에 국한되지 않고, 의학·식물학·화학 등 많은 분야에 걸쳐 광범위하게 연구하였다. 수학 분야에서 미적분학을 발전시키고, 변분학을 창시하였으며, 대수학·정수론·기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다. 수학자로서의 연구를 시작한 시기는 뉴턴이 죽은 시기에 해당하여 해석기하학·미적분학의 개념은 갖추어져 있었으나 조직적 연구는 초보단계로 특히 역학·기하학의 분야는 충분한 체계가 서 있지 않았다. 이러한 미적분학을 발전시켜 《무한해석 개론 Introduction in Analysis Infinitorum》(1748) 《미분학 원리 Institutiones Calculi Differontial》(1755) 《적분학 원리 Institutiones Calculi Integrelis》(1768~1770), 변분학(變分學:극대 또는 극소의 성질을 가진 곡선을 발견하는 방법)을 창시하여 역학을 해석적으로 풀이하였다. 이 밖에도 대수학·정수론(整數論)·기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다. 그 중에도 삼각함수의 생략기호(sin, cos, tan)의 창안이나 ‘오일러의 정리’ 등은 널리 알려져 있다.

오일러는 복리계산을 위한 일반식 $a(1+r)^n$에서 작은 수 r을 1/N 으로 바꾸어 $(1+1/N)^N$식으로 변형하고 N이 무한히 큰 경우에 대하여 이항정리를 적용하여 다음과 같은 무한급수의 식을 제안하였습니다.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1*2}+\frac{1}{1*2*3}+\frac{1}{1*2*3*4}+....$$

이 식의 수렴 값은 $e=2.7182818...$ 이 됩니다.

▶ 일반식 $(1+h)^{(\frac{1}{h})}$와 로그의 관계

$(1+h)^{(\frac{1}{h})}=Y$라고 하고, 양변에 로그 그리고 극한을 취하면

$$\frac{1}{h}ln(1+h)=\ln Y$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln(1+h)=\lim_{h\to 0}\ln Y$$

이 됩니다. 부정형의 계산을 위하여 로피탈의 정리를 적용하면,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(1+h)}}{1}=\ln Y$$

$$1=\ln Y$$

이 됩니다. 그러므로 $Y=e$가 유도됩니다. 오일러는 $\lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{h})^{h}=e$라고 제안하였습니다.

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\ e \qquad \text{or} \qquad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=\ e$$

그 후, 사람들은 e 라는 수를 "오일러 수"라 불러주기로 하였습니다.

▶ 미분계수의 적용

함수 $y=f(x)$에 대한 변화율, 미분계수는 또는 도함수는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

다음과 같은 지수함수 $y=b^{x}$에 대한 도함수(변화율 혹은 미분)를 계산해 보면 다음과 같습니다.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b^{x+\Delta x}-b^{x}}{\Delta x}$$

지수법칙을 적용하면

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{b^{x}(b^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

이 됩니다. 여기서 b^{x}는 Δx와 무관하므로 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\frac{dy}{dx}=b^{x}\lim_{h\to 0}\frac{b^{h}-1}{h}$$

여기서 $h=\Delta x$를 의미합니다. 주어진 식에서 $\lim_{h\to 0}\frac{b^{h}-1}{h}$의 극한을 k라고 하고 식을 정리하면 다음과 같습니다. 즉,

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}\text{라고 하면} \qquad \frac{dy}{dx} = k \cdot b^x$$

이 됩니다. 상기 식은 의미는 아래와 같습니다.

"지수함수의 도함수는 그 자신의 함수에 비례한다."

한 걸음 나아가 $k = 1$을 만족하는 b의 값을 구하면, 즉, $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$을 만족하는 b의 값을 구하면 다음과 같습니다.

임의의 b의 값에 대해서 $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$ 을 만족하려면 $\frac{b^h - 1}{h} = 1$을 항상 만족하면 됩니다. 즉, 식 $b^h = 1 + h$의 조건이 성립하면 됩니다. 주어진 식을 정리하면

$$b = \sqrt[h]{1+h} = (1+h)^{1/h}$$

이 됩니다. 그러므로 다음과 같은 최종 관계식이 유도됩니다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1, \qquad b = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

결과적으로 $y = b^x$에 대한 도함수가 $\frac{dy}{dx} = b^x$ 이 되기 위한 b의 값은 다음과 같습니다.

$$b = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

이 수식은 복리계산을 위한 일반식의 형태와 동일한 형태가 됩니다. 오일러는 밑 b를 e라고 표기하고 다음과 같이 정의했습니다.

"지수함수 e^x의 미분은 그 자신을 함수 e^x가 된다."
"임의의 함수의 미분이 그 자신이 되는 함수는 지수함수 e^x가 유일하다."

▶ 로그함수 $y = \ln_e x \quad e > 0, e \neq 1$ 의 미분계수를 구하시오.

미분 정의식에 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln_e(x+h) - \ln_e x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln_e(\frac{x+h}{x})$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x}{x} \frac{1}{h} ln_e(1+\frac{h}{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} ln_e(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

이 됩니다. 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$= \frac{1}{x} ln_e \lim_{h \to 0} (1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

앞에서 정리한 바와 같이 $\lim_{h \to 0} (1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = e$ 이므로, 구하고자하는 미분계수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

이 됩니다.

▶ 관계식에서 x대신 $1+x$를 대입하면 정리하면

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{(1+x)} dx$$

이 되는데, 이는 수학사에 엄청난 영향을 발휘하게 됩니다. 이유를 설명하면 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ....$$

와 같은 관계식을 적용하면

$$\ln(1+x) = \int 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ....dx$$

이고, 각각의 항에 대하여 적분을 수행하면

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - ....$$

이 됩니다. 결과에서 알 수 있듯이 로그 함수가 다항함수의 형태로 표현이 된다는 것을 보여주기 때문입니다.

⑤ 쌍곡선 함수 $y=\frac{1}{x}$의 적분은 $\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$

함수 $y=e^x$의 변화율 $dy/dx=e^x=y$이 됩니다. 식을 변형하면

$$dx/dy=1/e^x=1/y$$

의 관계가 성립합니다. 함수 $y=e^x$의 로그관계식은 $x=\ln y$이 됩니다. 그러므로 $y=\ln x$이면, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$이 됩니다.

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}, \qquad \ln x=\int \frac{1}{x}dx$$

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$의 관계식은 $n=1$을 제외한 모든 실수 n에 대하여 성립합니다. 하지만, $n=1$이면 적분식의 분모가 0이 되기 때문에 해를 제공하지 못합니다. 쌍곡선 함수 $y=\frac{1}{x}$의 적분은 $n=1$인 경우에 대한 해를 제공하고 있음을 알 수 있습니다.

⑥ 자연상수 e는 왜 초월수인가?

원주율 π의 역사는 기원전 2000년 이상 고대까지 거슬러 올라갑니다. 하지만, 자연상수 e의 역사는 겨우 400년 정도입니다. 자연상수 e와 관련된 역사를 정리하면 다음과 같습니다.

1) 복리이자의 계산에서부터 출발하였습니다.
2) 쌍곡선 함수의 구적이 로그함수의 형태가 되는 것이 발견되었습니다.
3) 미적분학의 발견과 함께 지수함수는 자신의 도함수와 같다는 사실이 밝혀졌습니다.
4) 이후 해석학에서 지수함수 e^x는 중추적인 역할을 담당합니다.

이러한 과정을 거쳐 e라는 수가 발전하였으나, 현재까지도 e라는 수의 정확한 의미는 풀리지 않은 채로 남아 있습니다.

1-9 맥클로린 급수와 테일러급수 그리고 오일러 항등식

① 맥클로린 급수(Maclaurin's series)에 대한 유도과정을 정리하면 아래와 같습니다.

함수 f(x)가 어떤 수렴구간에서 다음과 같은 형태의 다항식으로 표시된다고 가정합니다.

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdot\cdot\cdot + c_n x^n + \cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

등식을 성립시키기 위한 계수 $c_i (i = 0,1,2,3,...)$는 구해야 하는데 계수는 아래와 같은 방법으로 계산이 가능합니다. 먼저, 식(1)을 연속 미분하여 정리합니다.

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$$
$$f'(x) = c_1 + 2\ c_2 x + 3\ c_3 x^2 + 4\ c_4 x^3 + 5\ c_5 x^4 + \cdots$$
$$f''(x) = 2\ c_2 + 3 \cdot 2\ c_3 x^1 + 4 \cdot 3 c_4 x^2 + 5 \cdot 4 c_5 x^3 + \cdots$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2\ c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2\ c_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3\ c_5 x^2 + \cdots$$
....

위의 식에 x=0을 대입하여 전개하면,

$$f(0) = c_0$$
$$f'(x) = 1 c_1$$
$$f''(0) = 2 \cdot 1\ c_2$$
$$f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1\ c_3$$

미분을 통하여 계산된 변수 $c_i (i = 0,1,2,3,...)$의 값을 식(1)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 맥클로린 급수전개식이 유도됩니다.

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots \quad (2)$$

식 (2)을 맥클로린 급수 또는, x=0에 과한 f(x)의 멱급수 전개(power-series expansion)라고 합니다. 이름은 스코틀랜드 수학자 콜린 맥클로린(Colin Maclaurin,1698-1746)의 이름을 따서 붙인 것입니다.

▶ 맥클로린 급수(Maclaurin's series)의 의미

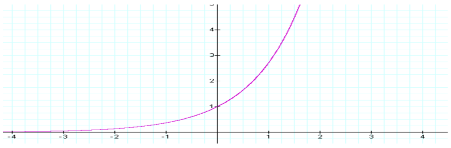
임의의 함수 $f(x)$를 x에 대한 1차함수, 2차함수, 3차함수 등등 x에 대한 각각의 고차함수의 계수를 계산한 후, 이들 함수의 합으로 표현한 것입니다. 즉, 주어진 임의의 함수 $f(x)$를 x에 대한 고차함수의 다항식 형태로 표현할 수 있다는 것을 의미합니다.

▶ 맥클로린 급수(Maclaurin's series)의 예

맥클로린 급수를 이용하여 e^x를 전개하면 다음과 같이 주어집니다.

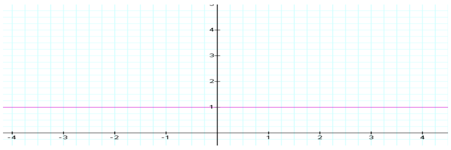
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots$$

등호 좌변의 주어진 함수 $f(x) = e^x$의 그래프는 다음과 같습니다.

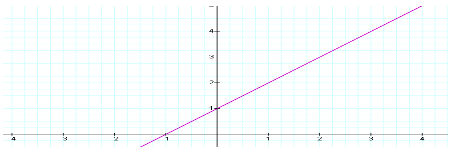


그러면 등호의 우변 즉, 함수 전개식을 항별로 그려보면 다음과 같이 되는 것을 알 수 있습니다.

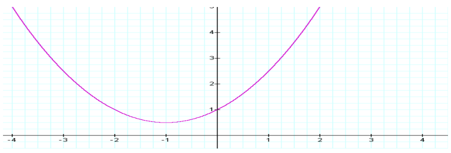
▻ $f(x) = 1$



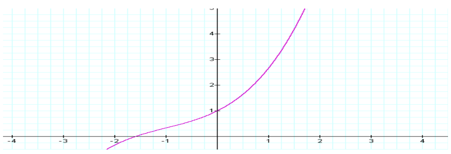
▻ $f(x) = 1 + x$



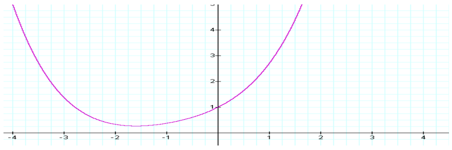
▻ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$



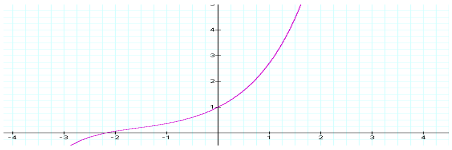
▻ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$



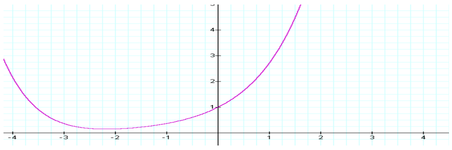
▻ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$



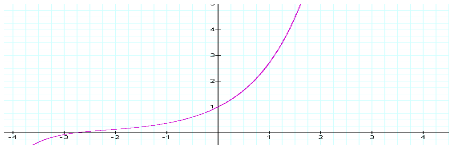
▻ $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$



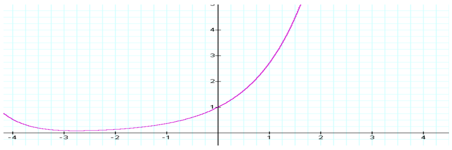
▻ $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6$



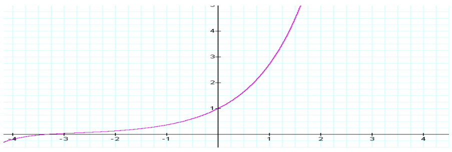
▻ $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{5040}x^7$



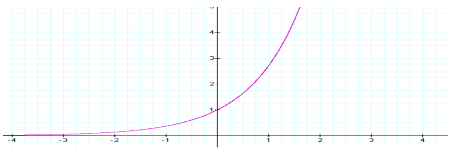
▻ $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{40320}x^8$



▻ $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{40320}x^8+\frac{1}{362880}x^9$



x에 대한 9차 함수까지의 합을 나타낸 그래프를 주어진 원함수 $f(x)=e^x$의 그래프와 비교하면 급수전개식의 의미를 쉽게 분석할 수 있습니다.



$f(x)=e^x$

② 테일러 급수(Tayler‘s series)

테일러 급수(Taylor series)는 미적분학에서, 미분 가능한 어떤 임의의 함수를 맥클로린 급수와 유사하게 다항식의 형태로 표현하는 것입니다. 이 이름은 영국의 수학자 브룩 테일러의 이름에서 따온 것이지만, 브룩 테일러가 처음으로 발견한 것은 아닙니다.

▶ 테일러급수 전개식 유도

Maclaurin 급수 전개식과는 다르게 주어진 임의의 함수 $f(x)$가 다음과 같은 다항식의 형태로 표현된다고 가정합니다.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{3}$$

다항식의 계수 $a_i(i = 0,1,2,3,\ldots)$를 결정하기 위하여 주어진 식(3)을 미분하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \cdots$$
$$f'(x) = a_1 + 2\ a_2(x-a) + 3\ a_3(x-a)^2 + 4\ a_4(x-a)^3 + \cdots$$
$$f''(x) = 2\ a_2 + 3{\cdot}2\ a_3(x-a)^1 + 4{\cdot}3a_4(x-a)^2 + 5{\cdot}4a_5(x-a)^3 + \cdots$$
$$f'''(x) = 3{\cdot}2\ a_3 + 4{\cdot}3{\cdot}2\ a_4(x-a) + 5{\cdot}4{\cdot}3\ a_5(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

위의 식에 $x = a$를 대입하여 정리하면,

$$f(a) = a_0$$
$$f'(a) = 1a_1$$
$$f''(a) = 2{\cdot}1\ a_2$$
$$f'''(a) = 3{\cdot}2{\cdot}1\ a_3$$

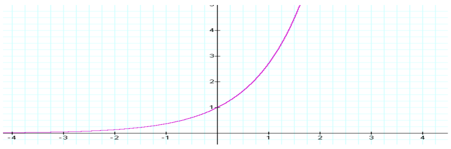
이 됩니다. 위의 식으로부터 계산된 다항식의 계수 $a_i(i = 0,1,2,3,\ldots)$를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{4}$$

식 (4)를 테일러의 급수전개식(Tayler‘s series)이라고 합니다.

▶ 테일러 급수(Tayler‘s series)의 의미

지수함수 $f(x)=e^x$를 이용하여 테일러 급수의 의미를 설명하면 다음과 같습니다.



먼저, 지수함수 $f(x)=e^x$를 테일러급수를 이용하여 정리하려면 약간의 문제가 발생합니다.

$$f(x)= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+ \cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

a의 값을 정해야 하기 때문입니다. $a=1$을 대입하여 수식을 정리하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$f(x)= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots +\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

지수함수 $f(x)=e^x$는 미분해도 자기 자신이 되는 함수입니다. 그러므로

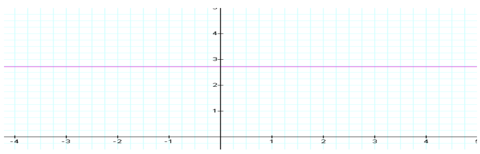
$$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=e^1=2.71828 1828....$$

이 되며, 주어진 값을 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리됩니다.

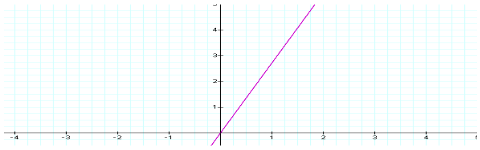
$$f(x)=2.72+\frac{2.72}{1!}(x-1)+\frac{2.72}{2!}(x-1)^2+\frac{2.72}{3!}(x-1)^3+\frac{2.72}{4!}(x-4)^4+\cdots$$

위의 식에서 x에 대한 고차함수로 나누어서 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.

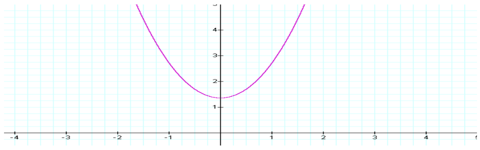
▻ $f(x)=2.72$



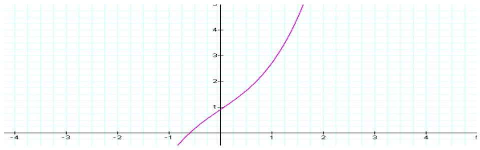
- $f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1)$



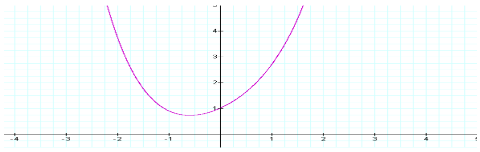
- $f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2$



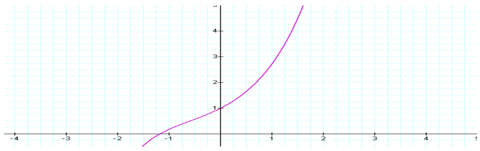
- $f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3$



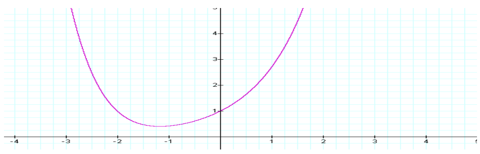
- $f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4$



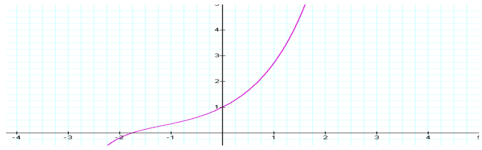
- $f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-4)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5$



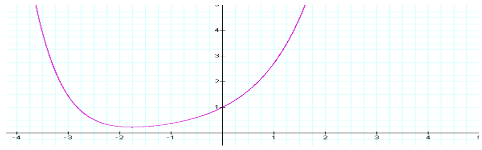
- $$\begin{aligned} f(x) = \ & 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-4)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 \\ & + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6 \end{aligned}$$



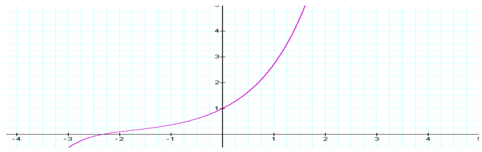
- $$\begin{aligned} f(x) = \ & 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-4)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 \\ & + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6 + \frac{2.72}{7!}(x-1)^7 \end{aligned}$$



▻ $f(x)= 2.72+\frac{2.72}{1!}(x-1)+\frac{2.72}{2!}(x-1)^2+\frac{2.72}{3!}(x-1)^3+\frac{2.72}{4!}(x-4)^4+\frac{2.72}{5!}(x-1)^5$
$+\frac{2.72}{6!}(x-1)^6+\frac{2.72}{7!}(x-1)^7+\frac{2.72}{8!}(x-1)^8$

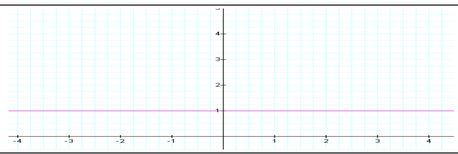
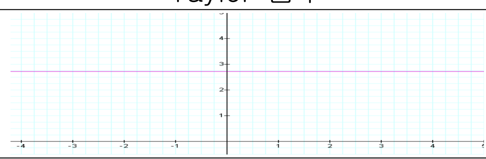
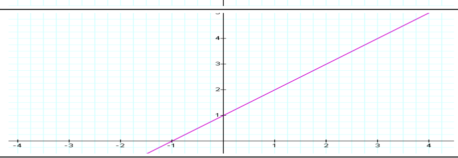
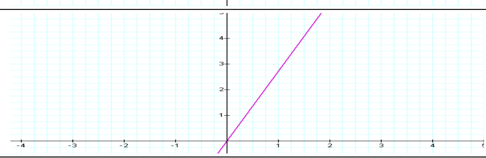


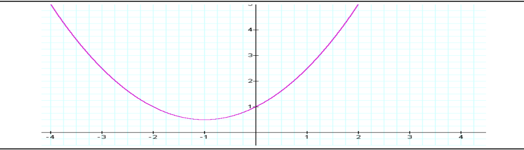
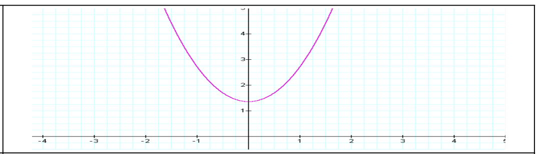
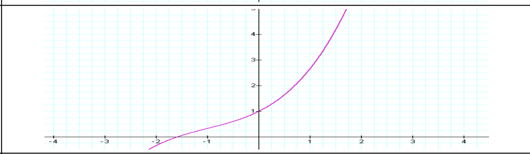
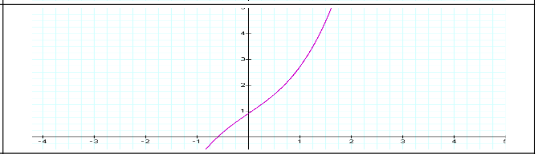
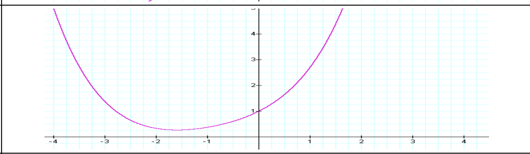
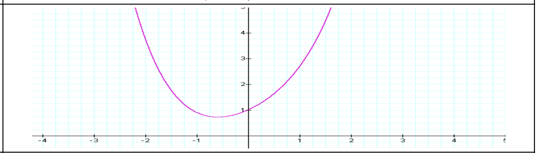
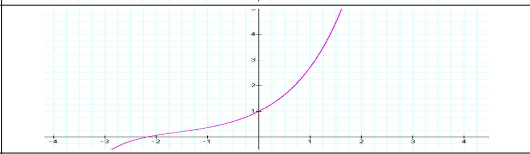
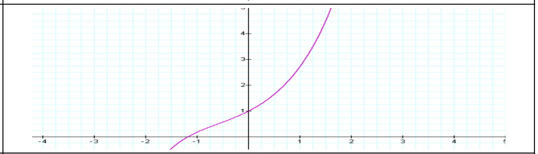
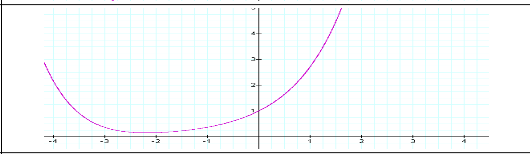
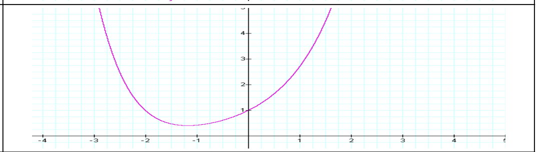
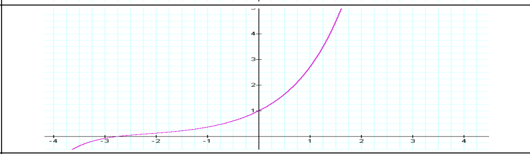
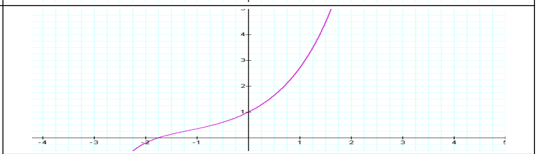
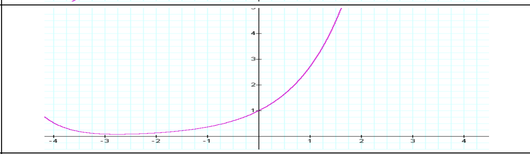
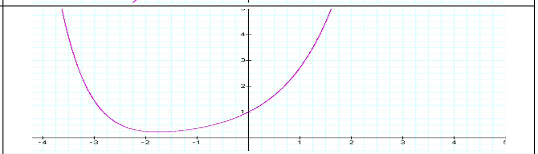
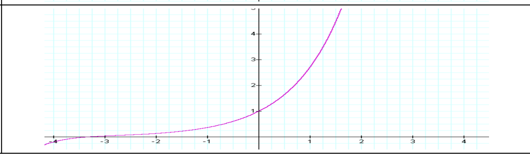
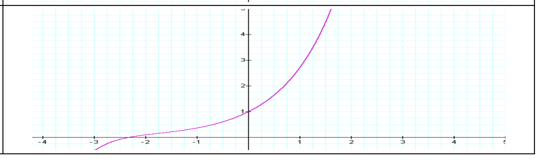
▻ $f(x)= 2.72+\frac{2.72}{1!}(x-1)+\frac{2.72}{2!}(x-1)^2+\frac{2.72}{3!}(x-1)^3+\frac{2.72}{4!}(x-4)^4+\frac{2.72}{5!}(x-1)^5$
$+\frac{2.72}{6!}(x-1)^6+\frac{2.72}{7!}(x-1)^7+\frac{2.72}{8!}(x-1)^8+\frac{2.72}{9!}(x-1)^9$



x에 대한 9차함수까지의 합을 나타낸 그림을 보면 주어진 지수함수 e^x의 그래프를 그대로 따라가고 있는 것을 알 수 있습니다.

▶ 지수함수 $f(x)=e^x$에 대한 맥클로린 급수전개식과 테일러 급수 전개식의 그래프를 차수별로 나누어 정리하면 다음과 같습니다.

	Maclaurin 급수	Tayler 급수
x=0차 상수항		
x=1차		

x=2차		
x=3차		
x=4차		
x=5차		
x=6차		
x=7차		
x=8차		
x=9차		

그래프의 비교에서 알 수 있듯이 맥클로린 급수는 x=0에서 주어진 함수를 다항식의 형태로 급수전개하여 표현한 것이고, 테일러 급수는 x=a 위치에서 주어진 함수를 다항식의 형태로 급수전개하여 표현한 결과를 보여줍니다.

③ 오일러(Euler) 항등식 : 전기공학을 공부하다보면 자주 접하게 되는 항등식으로 오일러 항등식이라는 것이 있습니다. 이는 맥클로린 급수전개식을 이용하면 간단하게 증명할 수 있습니다.

맥클로린 급수를 이용하여 e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$를 전개하면 다음과 같이 급수전개 됩니다.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

(−∞<x<∞)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n!}x^{2n} + \cdots$$

(−∞<x<∞)

위의 전개식에 x대신에 jθ 즉, $e^{j\theta}$, $\sin j\theta$, $\cos j\theta$의 값을 대입하여 정리하면 다음과 같은 오일러 항등식을 유도할 수 있습니다.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

오일러 항등식이 유명한 이유는 복잡한 삼각함수의 계산을 지수함수의 계산으로 변환시켜 계산을 가능하게 해주기 때문입니다.

1-10 라플라스 변환(Laplace Transform)

라플라스 변환(Laplace Transformation)은 선형 상미분방정식의 해를 구하거나 시스템의 전달함수를 구하는 데에 쓰이는 수학적 방법입니다. 이 변환을 적용하면 미적분방정식이 대수방정식의 형태로 변환이 되기 때문에 미적분방정식을 쉽게 풀 수 있습니다. 또한, 시스템의 특성을 분수함수 형태의 전달함수로 나타낼 수 있어서 수학적으로 해석하기 쉬워지기 때문에 제어 시스템의 해석과 설계에도 많이 활용됩니다. 용어는 프랑스의 천문학자·수학자 피에르 라플라스(Pierre Simon de Laplace, 1749.3~1827.3)의 이름에서 유래하였습니다.

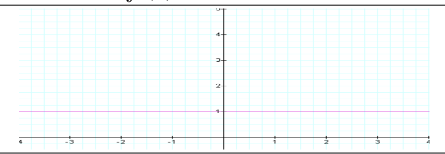
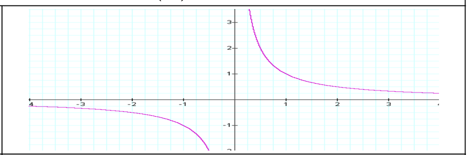
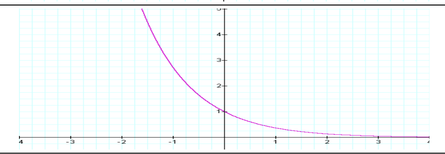
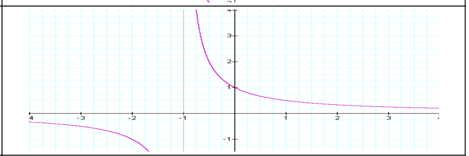
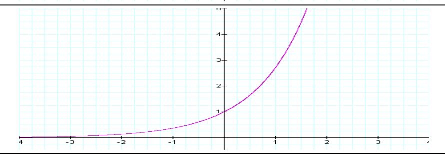
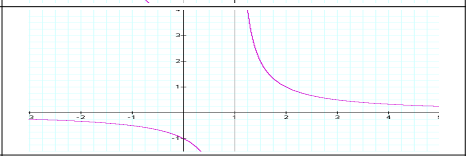
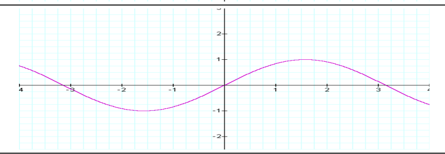
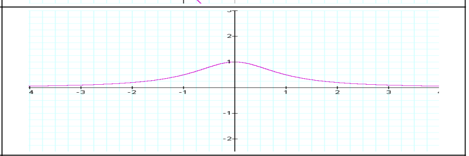
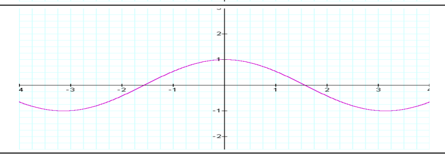
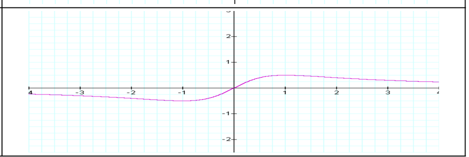
① 라플라스 변환의 정의식 유도

임의의 함수 $f(t)$가 있을 때, 라플라스 변환은 아래의 수식과 같이 주어진 함수에 e^{-st}를 곱한 후, 시간변수 t에 대하여 0에서 ∞까지 적분한 값으로 다음 식으로 정의합니다.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{o}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt$$

② 라플라스 변환 예제

퓨리에 급수전개와 메클로린 급수전개를 반복으로 하면 변환 전의 식과 변환 후의 식을 유도할 수 있습니다. 여기서는 변환에 대한 증명은 생략하고 몇 개의 라플라스 변환의 예제를 그래프로 비교하여 정리하면 다음과 같습니다.

$f(t)$		$F(S)$	
1		$\frac{1}{S}$	
e^{-t}		$\frac{1}{S+1}$	
e^{t}		$\frac{1}{S-1}$	
$\sin t$		$\frac{1}{S^2+1}$	
$\cos t$		$\frac{S}{S^2+1}$	

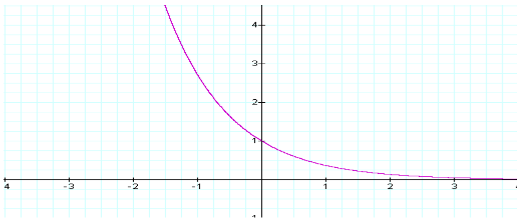
③ 라플라스 변환의 의미

▶ 왜 함수 e^{-st}를 이용할까요?

일반적으로 삼각함수와 지수함수에 대한 적분계산을 수행하는 경우, 부분적분을 2회 수행한 후, 원시함수와의 관계를 이용하여 최종 결과식을 유도하게 합니다. 변환을 위해서는 시간변수를 가지는 삼각함수나 지수함수를 이용하여야 하는데 시간에 따라 수렴하는 함수는 지수함수이기 때문에 지수함수 e^{-st}를 변환에 이용한 것 입니다.

▶ $e^{-st} \cdot f(t)$는 어떠한 의미를 가질까요?

지수함수 e^{-st}는 아래의 그래프로서 표현되는 함수입니다.



시간변수 t가 ∞로 갈수록 함수의 값은 0으로 접근하기 때문에 s를 특정상수로 하는 e^{-st} 함수는 0에서 ∞까지 적분을 하면 유한한 값으로 수렴하는 성질을 가지게 됩니다.

수렴하는 지수함수 e^{-st}를 임의의 함수에 곱하면 유한한 값으로 수렴하는 함수가 되므로 시간에 대한 적분이 가능해 집니다.(발산함수의 경우, 적분계산 불가) 일단 곱해서 수렴되는 함수로 만든 후, 시간에 대하여 적분을 취하면 시간변수 t는 사라지고 s의 함수가 됩니다. 즉, 시간 t에 관한 적분함수가 s에 대한 대수 함수로 변환되기 때문에 계산은 s에 대한 대수함수의 형태로 바뀌게 됩니다.

▶ 변수 s는 무엇일까요?

s는 일반적으로 복소변수라고 하며, $s=\sigma+j\omega$로 표현되는데 σ는 정수, w는 각속도를 나타내므로 결과적으로는 주파수 f의 함수 형태가 된다고 할 수 있습니다.

라플라스 변환이 활용되는 분야는 아래와 같이 설명할 수 있습니다. 예를 들어 주어진 함수가 전압을 나타내는 $v(t)$일 경우, 회로에 대한 지배방정식을 구성하였는데 전압을 나타내는 $v(t)$의 함수와 함께, 전압의 미분함수 $\frac{d}{dt}v(t)$ 그리고 전압의 적분함수 $\int v(t)dt$가 동시에 지배방정식에 나타나는 경우 계산을 수행하기 어려워집니다. 이러한 경우, 라플라스 변환을 수행하면 전압에 대한 모든 미적분 함수가 대수함수로 바뀌기 때문에 계산이 가능해지는 특징이 있습니다. 라플라스 변환은 이와 같이 미분과 적분이 포함된 미적분방정식을 계산하는데 반드시 필요한 계산방법입니다.

2 장 전자기학

2-1 자연계에 존재하는 4종류의 힘

자연계에 존재하는 힘의 종류에는 4가지가 있습니다. 정확하게는 중력 상호작용(重力相互作用, gravitational interaction), 전자기 상호작용(電磁氣的相互作用, electromagnetic interaction), 강한 상호작용(强—相互作用, strong interaction), 약한 상호작용(弱—相互作用, weak interaction)이라는 용어로 정의됩니다. 이 세상에 이러한 4가지의 힘이 존재하는 이유는 무엇일까요? 이 문제에 대한 답을 제시할 수는 없습니다. 종교적인 입장에서 답을 제시한다면 하나님이 세상을 창조하기 위하여 사용한 도구라고 생각하시면 될 것 같습니다. 이들 힘에 관련된 수식들은 모두 실험식입니다. 증명이 불가능한 수식이라는 것을 명심하셔야 합니다. 이들 4개의 힘에 대하여 정리하면 아래와 같습니다.

① 중력상호작용 혹은 만유인력(萬有引力, universal gravitation)

자연계에서 질량을 가지는 모든 물체 사이에는 서로 끌어당기는 인력이 작용합니다. 이를 다른 용어로 만유인력이라 합니다. 이러한 만유인력의 크기는 다음과 같은 식으로 계산됩니다.

$$F= \ G\ \frac{M*m}{R^2}$$

여기서 G는 만유인력 상수로서 값은 $6.67259 \times 10-11[N \cdot m^2/kg^2]$이고, M과 m은 두 물체의 질량, R은 두 물체 사이의 거리입니다. 만유인력 상수 G의 값은 매우 작기 때문에 질량이 매우 큰 경우에만 힘 F를 느낄 수 있게 됩니다. 힘 F는 벡터량이므로 $\vec{F}$와 같이 표기하여야 하지만 여기서는 스카라적인 성질만을 다루도록 하겠습니다.

지구가 물체를 잡아당기는 힘을 중력[重力, gravity]이라고 합니다. 정확하게는 만유인력과 지구의 자전에 따르는 원심력이 더해진 힘을 나타냅니다. 따라서 중력은 만유인력의 한 예라고 할 수 있습니다. 중력의 크기는 물체의 질량에 비례하므로 자유낙하하는 물체는 질량에 상관없이 일정한 가속도로 떨어지게 됩니다. 크기는 $9.8[m/s^2]$이 되며 이를 중력가속도 g라고 합니다. 지구의 경우, 일반적으로 반지름이 크고 원심력이 강한 적도지역에서는 중력의 크기가 최소가 되고, 반지름이 작고 상대적으로 원심력이 작은 극지방에서는 중력의 값이 최대가 됩니다.

② 전자기 상호작용 혹은 전자기력(電磁氣力, electromagnetic force)

전기(電氣)나 자기(磁氣)에 바탕을 둔 힘을 총칭하는 용어입니다. 일반적으로 전자기장(電磁氣場)내의 전하, 자기량, 전류에 전자기장이 미치는 힘을 가리킵니다. 전기력과 자기력은 근본적으로 속성이 같은 힘입니다. 전자석처럼 전기로 자기력을 만들 수 있고, 반대로 발전기처럼 자기력으로 전기를 만들 수도 있기 때문입니다. 이와 같이 전기와 자기는 밀접한 관련을 가지고 상호작용을 하므로 이를 통틀어 전자기라 하고, 전자기와 관련된 힘을 전자기력이라 합니

다.
  전하를 띤 입자가 전기장 안에서 받는 힘은 $q\vec{E}$가 되고 자기장 안에서 받는 힘은 $qv\times\vec{B}$가 됩니다. 이를 로렌츠 힘이라고 하며 전자기장 안에서 받는 힘은 이 두 힘을 더한 아래의 식과 같이 됩니다.

$$\vec{F}=\ q(\vec{E}*v\times\vec{B})$$

여기서, $\vec{E}$는 전기장, $\vec{B}$는 자기장, q는 입자의 전하량, v는 입자의 속력, $\times$는 벡터의 외적(cross product)을 의미합니다. 양전하를 띤 입자는 전기장 $\vec{E}$안에서 가속되며, 자기장 $\vec{B}$을 통과할 때에는 외적 때문에, 오른손 법칙에 따라 나선형을 그리며 움직이게 됩니다.

③ 강한 상호작용 [强一相互作用, strong interaction], 강한 핵력(强한核力, strong nuclear force)
  원자핵과 같이 매우 짧은 거리 안에서 작용하는 힘으로 나머지 세 개의 상호작용보다 훨씬 큰 힘으로 작용합니다. 원자핵을 구성하는 양성자는 전자기력에 의해 서로 밀어내야 하지만 핵 내부에서는 강한 상호작용을 통해 뭉쳐져 있습니다. 즉, 강한 핵력은 양성자와 중성자를 구분하지 않고 인력으로 작용하는 것을 의미합니다. 핵 내부에서 2개의 소립자 사이의 거리가 약 $10^{-15}m$ 이하가 될 때 작용하는 힘 또는 상호작용을 강한 상호작용이라고 말합니다.

④ 약한 상호작용 [弱一相互作用, weak interaction]
  약한 상호작용은 흔히 약력, 또는 약한 핵력이라고 부릅니다. 약한 상호작용은 베타 붕괴에서 찾아볼 수 있습니다. 약력의 '약'은 약력장의 세기가 강력장의 세기보다 1013배 약한 특징을 가지는 것에 기인합니다. 전자기적 상호작용과 비교하면 10^{-12} 정도의 크기가 됩니다. 그러나 약력도 짧은 거리에서는 중력상호작용보다는 큰 값을 가지게 됩니다.

▶ 베타붕괴[beta崩壞]
  일반적인 원자들의 경우에 핵은 강한 상호작용에 의하여 뭉쳐져 있게 됩니다. 하지만 핵분열을 일으키는 특수 원자들은 원자핵 속의 양성자가 양전자를 방출하고 중성자가 되거나, 중성자가 전자를 방출하고 양성자로 변하는 원자핵 변화현상을 일으킵니다. 원자핵이 베타붕괴를 일으키면 질량수는 변하지 않고, 양자수를 나타내는 원자번호가 1개 증가하거나 또는 감소하게 되는데 이 때 질량은 거의 0이며 전하를 가지지 않은 중성미자라는 입자를 방출합니다.

▶ 중성미자[中性微子, neutrino]
  중성자가 양성자와 전자로 붕괴될 때에 생기는 소립자로서 전하를 가지고 있지 않고 질량이 극히 작은 입자입니다. 기본 입자의 일종으로 전자기, 약한 중력 상호작용에 영향을 받는 질량이 가벼운 경입자(lepton)에 속합니다.
  핵은 안정성을 높이기 위하여 알파붕괴(α-decay)나 베타붕괴(β-decay)를 통해 핵의 구성을

변화시키게 되는데 1934년에 페르미(Enrico Fermi)는 베타붕괴 과정에서 전자와 양성자 이외에 ‘중성의 작은 입자’라는 의미의 “중성미자”가 방출된다는 것을 증명하였습니다.

2-2 스칼라, 벡터, 벡터표기 그리고 벡터연산(내적 외적)

① 스칼라(Scalar)의 정의 및 연산

방향을 가지고 있지 않고 크기만 가지고 있는 물리량을 뜻합니다. 물리량의 크기를 나타낸 수에 단위를 붙여 그대로 사용하며, 질량, 온도, 길이, 크기, 에너지, 전자가 가지는 전하량 등과 같이 물체의 속성과 관련이 있는 양이 스칼라량에 속합니다.

에너지 5J, 전하량 1C, 이동 거리 5M 등은 모두 스칼라로 표현된 물리량입니다. '어떤 방향으로' 5J의 에너지라는 말이 어색하게 느껴지는 것은 이런 양들이 방향에 대한 정보를 포함하고 있지 않기 때문입니다. 이렇듯 방향과 상관없이 크기만 가지는 양을 스칼라량이라고 합니다.

스칼라의 연산은 일반적인 사칙연산이 그대로 적용됩니다. 질량 2kg짜리 물체 위에 3kg짜리 물체를 얹으면 총 질량은 5kg이 됩니다. 이처럼 스칼라의 연산은 일상적으로 사용하는 더하기, 빼기, 나누기, 곱셈을 무리 없이 그대로 적용해서 사용할 수 있습니다. 하지만 스칼라가 이러한 사칙연산에만 사용되는 것은 아니고 단위 길이를 가진 벡터와 곱해져서 벡터의 크기를 나타내는 데도 쓰입니다. $5\hat{x}$는 x방향으로 크기가 5의 크기를 가짐을 나타내며 스칼라와 벡터의 곱으로 표현된 양입니다. 스칼라와 벡터의 곱은 결과적으로 벡터량이 됩니다.

② 벡터(vector)의 정의 및 연산

어떤 장소의 위치를 물을 때 우리는 어떻게 대답할까요? 여기서부터 '어느 방향'으로 '얼마만큼' 떨어져 있다고 말하게 됩니다. 이처럼 방향과 크기(멀리 떨어진 정도)를 동시에 표현해야 하는 경우 벡터를 사용합니다.

스칼라가 크기만을 가지고 있는 물리량인 것에 비해 벡터는 크기와 방향을 가지고 있으므로 두 가지 정보 모두를 나타내야 하는 양을 표현하기 위해서 사용됩니다. 속도, 가속도, 힘, 전기장, 자기장 등 대부분의 중요한 물리량들이 벡터의 예가 됩니다. 벡터는 일반적으로 크기와 방향을 가지고 있는 양으로써 두 가지 정보를 모두 표현할 수 있는 화살표를 이용하여 표현하게 됩니다.

► 벡터의 연산

숫자에 사칙연산이 적용되듯 벡터에도 더하기, 빼기, 외적, 내적과 같은 몇 가지 연산이 정의되어 있습니다. 벡터 덧셈은 힘의 합 등을 구할 때 쓰이며 벡터의 뺄셈은 변위를 구해서 속도, 혹은 가속도 벡터를 얻기 위해 주로 사용합니다.

벡터 내적은 에너지와 관련하여 힘이 한 일을 계산하는 경우에 사용되며, 벡터 외적은 자기장 속을 움직이는 전하가 받는 힘의 방향과 크기를 계산하는 경우에 사용됩니다. 벡터는 물리학 전 범위에서 빠짐없이 사용되므로 네 가지 연산을 실제로는 어떻게 계산하는지 그리고 그 연산의 결과가 기하학적으로는 어떤 의미를 가지는지 이해하여야 합니다.

두 개의 벡터 물리량이 $\vec{A}$, $\vec{B}$와 같이 주어졌을 경우, 벡터의 내적과 외적은 다음과 같이 정의 됩니다.

벡터의 내적 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \equiv |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta$

벡터의 외적 $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \equiv |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\sin\theta$

두 벡터에 대한 내적계산은 벡터 물리량 $\overrightarrow{A}$는 벡터 $\overrightarrow{B}$의 방향으로 얼마만큼의 벡터성분을 가지고 있는가를 스칼라 물리량으로 계산하는 것을 의미합니다.

두 벡터에 대한 외적계산은 벡터 물리량 $\overrightarrow{A}$와 벡터 $\overrightarrow{B}$를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이 즉, 스칼라 량을 계산한 후, 두 벡터로 만들어지는 면의 법선방향으로의 단위벡터를 부여하여 벡터 물리량으로 만드는 것을 의미합니다.

③ 벡터의 표기방법

전자기학의 교과목에서 사용하는 벡터 표기방법은 교과서의 저자들 마다 제각각입니다. 어떤 저자는 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$와 같이 굵은 글씨로, 어떤 저자는 $\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$와 같이 문자의 왼쪽에 선을 하나 추가함으로써, 또 다른 저자는 $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$와 같이 문자위에 화살표를 추가하여 벡터를 표시합니다. 거기다가 단위벡터의 표기방법도 가지가지입니다. $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$, $\overrightarrow{a_z}$와 같이 화살표로 표기된 소문자 벡터 a의 표기법에 좌표축의 변수를 아래첨자에 추가하여 표시하거나, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$와 같이 문자위에 모자(hat)기호를 추가하여 표시하는 방법도 있습니다. 벡터의 표기방법이 이렇게 복잡해진 것은 당시 시대의 출판 기술의 한계 때문에 그랬던 것으로 추측됩니다. 하지만, 현대 전자출판의 시대에서는 표기법을 사용하는 것에는 문제가 되지 않으므로 이해하기 쉽고, 표기하기 쉬운 표기법을 선택하여 사용하게 됩니다.

먼저, 일반 벡터의 표기법을 살펴보면 굵은 글씨로 표시하는 방법과 선을 추가하는 방법은 스칼라 물리량과의 비교를 위해서는 자세히 보지 않으면 구별하기 어려운 단점이 있습니다. 또한 단위벡터를 표시하는 방법도 소문자 a옆에 작은 첨자 글씨로 좌표축을 표시하는 것은 글씨가 너무 작아서 알아보기가 어렵다는 문제가 있습니다. 이러한 문제점을 피하기 위하여 일반적으로 사용하는 벡터 표기방법을 정리하면 다음과 같습니다.

① 일반 벡터의 표기방법 : 벡터변수에 화살표을 추가하여 표기하는 방법을 사용합니다.

$$\overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{H}$$

② 단위벡터의 표기방법 : 좌표변수에 모자(hat)을 추가하여 표기하는 방법을 사용합니다.

$$\hat{x}, \quad \hat{y}, \quad \hat{z}$$

추가하여 미분연산자 델(del, 혹은 nabla)은 ▽로서 표기합니다. 델 연산자(del operator)위에 화살표 표시를 하는 경우도 있지만, 델 연산자는 완전히 벡터라고 보기는 어렵습니다. 용어

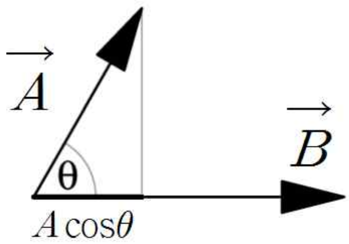
그대로 연산자이기 때문입니다. 벡터 연산의 경우에 오해하지 않도록 하기 위해서 화살표는 없이 사용합니다. 벡터에 대한 발산, 회전을 표기하면 다음과 같이 됩니다.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} \qquad \nabla \times \overrightarrow{B}$$

④ 내적[內積, inner product]

두 벡터에 대한 내적연산은 다음 식과 같이 정의됩니다.

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{A}|\,|\overrightarrow{B}|\cos\theta$$



벡터 $\overrightarrow{A}$ 가 $\overrightarrow{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$와 같이 벡터 $\overrightarrow{B}$ 가 $\overrightarrow{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$와 같이 주어진다고 하면, 내적은 다음과 같이 계산됩니다.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} &= |\overrightarrow{A}|\,|\overrightarrow{B}|\cos\theta \\
\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} &= (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\
\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} &= A_x\hat{x} \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\
&\quad + A_y\hat{y} \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\
&\quad + A_z\hat{z} \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})
\end{aligned}$$

여기서, 단위벡터의 내적연산을 적용하면 동일한 축방향의 내적은 $\cos 90 = 1$이 되고, 서로 다른 축방향의 내적은 90도의 각도를 가지므로 $\cos 90 = 0$이 됩니다. 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
&\hat{x} \cdot \hat{x} = 1, \qquad \hat{y} \cdot \hat{y} = 1, \qquad \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\
&\hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \qquad \hat{y} \cdot \hat{z} = 0, \qquad \hat{z} \cdot \hat{x} = 0
\end{aligned}$$

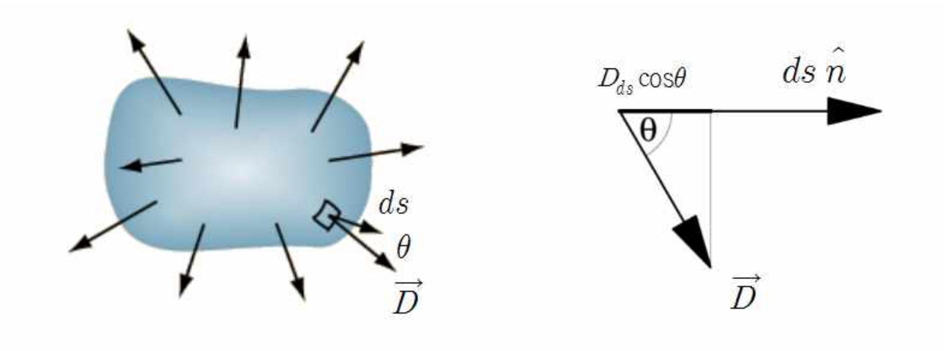
단위벡터의 벡터내적을 적용하면 결과식은 다음과 같이 정리됩니다.

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

내적연산의 의미는 아래와 같습니다. 벡터 $\overrightarrow{A}$와 벡터 $\overrightarrow{B}$가 주어졌을 때, 벡터$\overrightarrow{A}$는 벡터 $\overrightarrow{B}$ 방

향으로 얼마의 성분($A\cos\theta$)을 가지는가? 즉, 얼마의 스칼라 물리량을 가지는가를 계산하기 위한 벡터연산의 정의식입니다.

내적연산은 가우스 법칙의 정의를 표현하기 위하여 이용됩니다. 가우스 법칙(Gauss's law)은 “임의의 닫혀진 폐곡면에 대해서 그 곡면을 지나는 전기력선의 수를 폐곡면에 대하여 적분하면 폐곡면 내부에 존재하는 전하량과 같다.”는 것을 의미합니다.



그림과 같은 폐곡면 상에서의 미소면적 ds를 통과하는 전속밀도 벡터 $\vec{D}$는 미소면적 ds에 수평하는 성분과 수직하는 성분을 가지게 됩니다. 여기서 미소면의 수직 즉, 법선방향에 해당하는 성분을 계산하려면 내적연산을 수행하여야 합니다. 전속밀도 벡터 $\vec{D}$와 폐곡면의 미소 면적 벡터 $\vec{ds}$ 즉, $\vec{ds}=ds\hat{n}$에 대하여 내적을 계산하면 다음과 같이 정리됩니다.

내적의 정의식은

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

이므로

$$\vec{D}\cdot ds\hat{n}=D_{ds}\cos\theta\, ds$$

이 됩니다. 이는 미소면적 ds의 법선방향을 통과하는 전기력선의 양을 만드는 알짜 전하량의 크기는 $D_{ds}\cos\theta$ 가 된다는 것을 의미합니다.

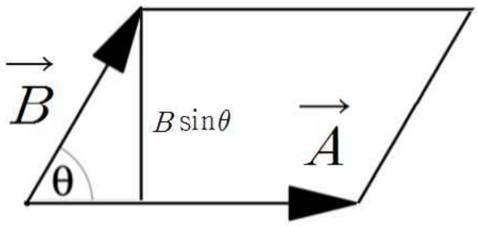
임의의 닫혀진 폐곡면에 대해서 그 곡면을 지나는 전기력선의 수를 폐곡면에 대하여 적분하면 폐곡면 내부에 존재하는 전하량과 같다는 가우스 법칙을 수식으로 표현하면 아래와 같습니다.

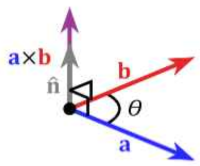
$$\oint\vec{D}\cdot\vec{ds}=Q$$

⑤ 외적 [外積, outer product or cross product]

두 벡터에 대한 외적연산은 다음 식과 같이 정의됩니다.

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=|\overrightarrow{A}|\,|\overrightarrow{B}|\,\sin\theta\,\hat{n}$$





벡터 $\overrightarrow{A}$가 $\overrightarrow{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$이고, 벡터 $\overrightarrow{B}$가 $\overrightarrow{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}$라고 하면, 벡터의 외적은 다음과 같이 계산됩니다.

외적의 정의식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\sin\theta$$
$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=\ & A_x\hat{x}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\ &+A_y\hat{y}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\\ &+A_z\hat{z}\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})\end{aligned}$$

여기서, 단위벡터에 대한 외적은 동일한 축방향의 경우 각도가 0도 이므로 $\sin 0=0$이 되어 사라지고, 서로 다른 축방향 단위벡터는 90도가 되므로 $\sin 90=1$이 됩니다. 그리고 단위 벡터로 구성되는 면의 법선방향에 대하여 벡터를 단위벡터를 지정해 주어야 합니다. 이러한 내용을 정리하면 다음과 같습니다.

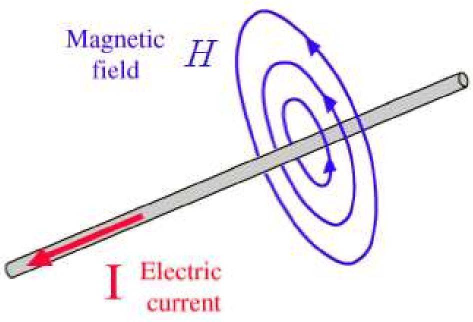
$$\hat{x}\times\hat{x}=0,\qquad \hat{y}\times\hat{y}=0,\qquad \hat{z}\times\hat{z}=0$$
$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\qquad \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x},\qquad \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

단위벡터의 계산결과를 이용하여 외적에 대한 최종 결과식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

외적연산의 물리적 의미는 토크(toque, 돌리는 힘)에서 유추할 수 있습니다. 회전문을 열 때 가능하면 문의 회전축에서 먼 곳을 밀어야 쉽게 열리는 현상을 의미합니다. 외적연산의 크기

는 평행사변형 면적이 되며, 방향은 벡터 $\vec{A}$에서 벡터 $\vec{B}$로 오른손을 감아쥐었을 때 엄지손가락이 가리키는 방향이 됩니다. 외적은 암페어(Ampere)의 주회 법칙 그리고 회전(Curl)정리에 적용됩니다.



오른손의 엄지 방향으로 전류가 흐른다고 하면, 네 손가락 방향으로 자기장이 발생합니다. “자기장이 존재하는 공간에 닫힌 폐경로를 구성하고 폐경로 상에서 자기장의 세기 $\vec{H}$를 선적분한 결과는 그 폐경로로 구성되는 내부의 단면을 관통하여 흐르는 전류의 크기와 같다.”는 암페어 주회법칙(Ampere's circuital law)을 수식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

암페어 주회법칙으로부터 유도된 회전정리(Curl)는 다음과 같이 표기됩니다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

미분연산자 ∇과 벡터 $\vec{H}$을 대입하여 정리하면

$$\nabla \times \vec{H} = |\nabla| \, |\vec{H}| \sin\theta$$

이 됩니다. Del 미분연산자와 벡터 $\vec{H}$의 외적으로 계산되는 값 즉, 평행사변형 면적이 전류밀도의 크기가 되고, 방향은 미소 폐경로로 구성되는 면의 법선 방향으로 주어집니다.

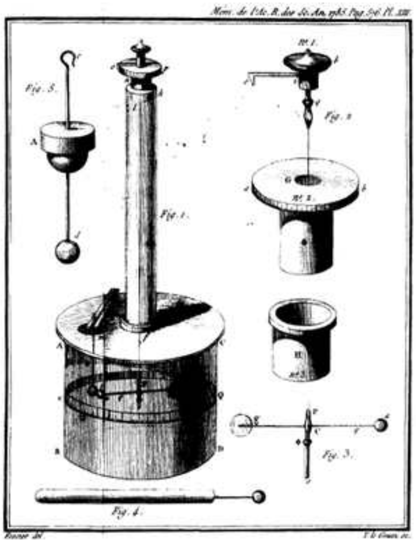
2-3 전기장의 세기, 전속밀도, 자속밀도, 자기장의 세기

먼저 전기분야와 관련된 주요법칙의 발표연대와 과학자명을 정리하면 다음과 같습니다. 전기장에 대한 법칙은 위에 두 개이고 나머지는 자기장과 관련된 법칙이라는 것을 볼 수 있습니다.

연대	내용
1785	쿨롱의법칙 : 두 전하 사이에 작용하는 힘
1835	가우스법칙 : 폐곡면 전속적분은 내부전하량 크기와 같다.
1820	외르스테드법칙 : 전류는 자기장을 만든다 전류가 자기장을 발생시킨다
1820	비오-사바르 법칙 : 미소 전류소가 만드는 자기장의 크기
1826	암페어 주회법칙 : 자기장의 폐경로 적분은 내부전류와 같다 전류는 자석의 경우와 유사하게 서로를 당기고 민다
1831	파라데이 전자기 유도법칙 : 시변자장은 전류를 만든다
1861-1862	맥스웰방정식
1892	로렌쯔법칙 : 자기장에서 도체가 받는 힘의 법칙

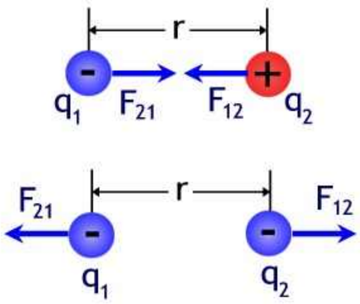
① 쿨롱의 법칙(Coulomb‘s Law)

쿨롱의 법칙은 전하들 사이에서의 정전기적 상호관계를 설명하는 물리법칙으로 1785년에 발표되었습니다. 쿨롱은 금속공과 비틀림 저울을 이용하여 전기 사이에 작용하는 힘의 크기를 정밀하게 측정하는 실험을 시작하여 1785년부터 1791년 사이에 전기력에 관한 실험을 정리한 논문 일곱 편을 과학 아카데미에 제출하였습니다. “전기력이 거리 제곱에 반비례하고 전기량의 곱에 비례한다.”는 쿨롱 법칙은 이 논문들 속에 들어 있습니다.



쿨롱의 법칙은 두 개의 정지된 전하 Q_1, Q_2 사이에 작용하는 전기력 F는 두 개 전하량의

곱에 비례하고, 그들 사이의 거리 r의 제곱에 반비례한다는 법칙으로 다음과 같이 표현됩니다.



$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

여기서, F는 힘, k는 쿨롱 상수, q_1, q_2는 전하의 크기, r은 두 전하 사이의 거리를 나타내며, 두 전하의 부호가 같으면 밀어내고, 다르면 끌어당기는 힘이 작용합니다. 위 식에서 쿨롱 상수 k의 값은 다음과 같습니다.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 [Nm^2/C^2]$$

각각 1[C]의 크기를 갖는 두 개의 전하가 1[m]의 거리에 있을 때 발생하는 힘의 크기를 계산하면 다음과 같습니다.

$$F = 9 \times 10^9 [Nm^2/C^2] \times \frac{1[C]1[C]}{1[m^2]} = 9 \times 10^9 [N]$$

여기서, 1kg중=9.8N의 단위환산을 적용하면

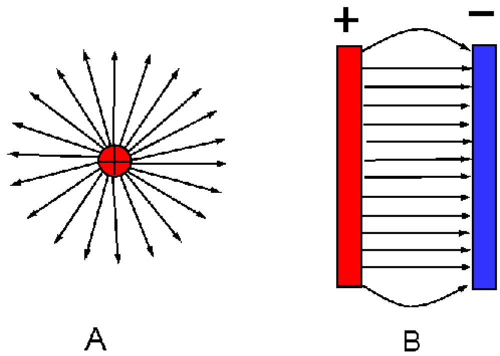
$$F \approx 90{,}000 * 10{,}000 kg중$$

이 됩니다. 즉, 각각 1C의 전하량을 갖는 두 점전하가 1m의 거리에 있을 때 발생하는 힘은 10t트럭 약 9만대의 무게와 같아집니다. 이렇게 큰 힘이 기준 단위가 된 것은 전기에 대한 상세한 지식이 없는 시절에 이를 측정 단위로 삼았기 때문입니다. 실제 일상생활에서 발생하는 정전기의 전하량은 대략 $\times 10^{-6}$에서 $\times 10^{-9}$ 쿨롱 정도에 불과합니다.

찰스 오스틴 드 쿨롱(Charles Augustin de Coulomb, 1736.06.14-1806.08.23) : 프랑스의 물리학자. 쿨롱의 법칙은 전하들 사이에서 정전기적 상호관계를 설명하는 물리법칙으로 인력과 척력의 정전기력에 대한 정의를 표현한다. 전자기학 이론의 발전에 기여하였다. SI 단위계에서 쿨롱 단위는 그의 이름을 딴 것이다.

② 전기장의 세기(Electric field intensity) $\overrightarrow{E}$

전기장(전계, 전장)이라는 개념은 파라데이(Michael Faraday)에 의하여 소개되었으며 주어진 한 점에서 전기장의 세기 및 크기는 장(field)의 내부에 “시험전하” 즉, +1C의 단위전하를 놓았을 때 단위전하에 작용하는 힘에 의하여 정의되며, 단위전하가 움직이는 방향 즉, 벡터의 방향은 화살표 방향과 같이 됩니다.



이를 수식으로 나타내면 다음과 같습니다.

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q_t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

여기서, $\overrightarrow{E}$는 전기장의 세기를 나타내며, $\overrightarrow{F}$는 전하에 작용하는 힘, q_t는 단위전하를 나타냅니다. 즉, +1C의 단위 전하가 받는 힘이 전계의 세기가 됩니다. 그러면 임의의 전하 +Q에 작용하는 힘은 다음과 같이 계산됩니다.

$$\overrightarrow{F} = +Q\overrightarrow{E}$$

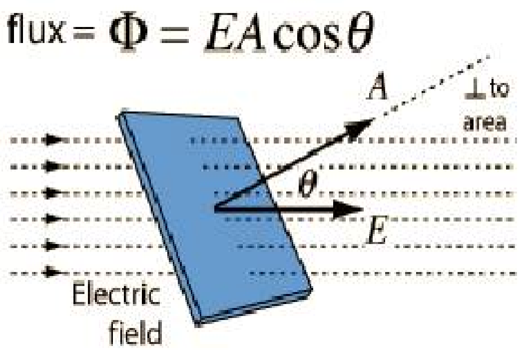
③ 가우스 법칙(Gauss's law)

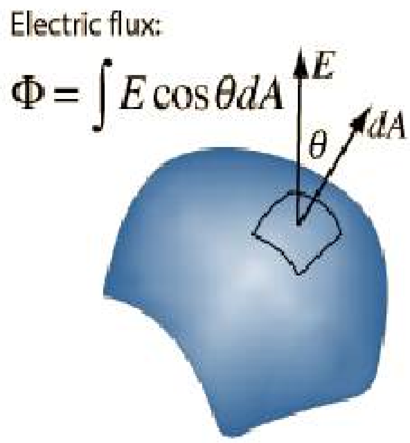
물리학에서, 가우스의 선속 이론으로 잘 알려져 있는 가우스 법칙은 전하의 본포와 그것에 의한 결과적인 전기장과 관련된 법칙입니다. 가우스에 의하여 1835년에 수식화 되었는데 1867년까지는 공개되지 못하였습니다. 가우스 법칙은 쿨롱의 법칙을 유도하는데 사용될 수 있고, 그 반대도 성립합니다.

가우스(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777.08.30-1855.02.23)
독일의 수학자이자 과학자로서. 1831년 가우스는 물리학 교수 웨버(Wilhelm Weber)와 자기장 분야에 대한 새로운 지식을 발견에 공헌 하였으며, 전기 분야에서는 키르히호프의 회로법칙(1845)의 발견에 공헌을 함.

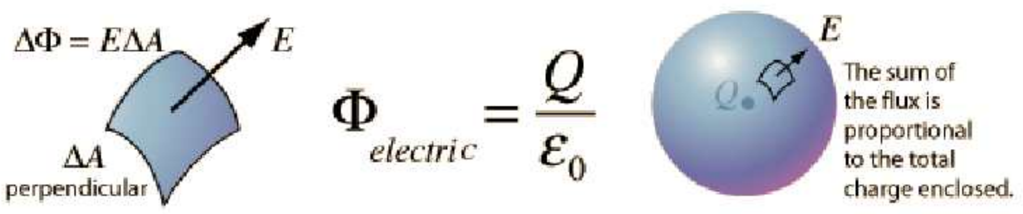
▶ 전속(전기 선속, Electric Flux)

  전속이라는 개념은 가우스법칙과 관련하여 매우 유용하게 이용됩니다. 임의의 미소 면을 통과하는 전속(electric flux) $\Delta\Phi$는 미소 면의 법선방향에 대한 전기장 벡터(Electric field)의 성분에 미소 면의 크기가 곱해진 물리량으로 정의됩니다.





여기서, 벡터 $d\overrightarrow{A}$는 방향은 면에 대한 법선방향을 가지면서, 크기는 미소 면의 면적 크기를 가집니다.



미소 곡면 $\Delta\overrightarrow{A}$를 관통하는 전속의 양은 다음과 같이 표현됩니다.

$$\Delta\Phi = \overrightarrow{E} * \Delta A_{perpendicular}$$
$$\Delta\Phi = \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A}$$

여기서 총 전속은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\Phi = \oint_A \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A}$$

여기서 전기장의 세기(electric field intensity) 벡터 $\overrightarrow{E}$의 방향을 나타내는 미소 면 벡터 $d\overrightarrow{A}$의 사상을 dA_n이라고 하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$dA_n = \hat{R} \cdot d\overrightarrow{A}$$
$$dA_n = \hat{R} \cdot \hat{n}\, dA$$

전기장 세기 벡터 $\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}$를 대입하여 정리하면

$$\Phi = \oint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{R} \cdot \hat{n} dA$$
$$\Phi = \oint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, dA_n$$

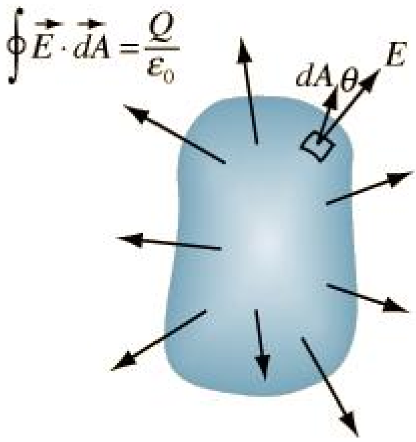
이 되고, 폐곡면을 반지름이 R인 구로 가정하여 적분을 수행하면 다음과 같은 식이 얻어집니다.

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

그러므로 총 전속은 매질의 유전율에 의하여 나누어진 전하량의 값이 됩니다. 최종적으로 전속을 이용하여 정리하면 다음과 같은 가우스법칙의 적분형이 얻어집니다.

$$\oint_A \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

► 가우스법칙의 적분형의 의미



“ 폐곡면에서 밖으로 나오는 전기 선속(electric flux)의 총합은 내부에 위치한 전하량을 유전율(permittivity)로 나눈 값과 동일하다. ”

가우스 법칙의 적분형은 전하의 분포를 둘러싸는 대칭 가우시안 표면(a symmetric gaussian surface)을 구성하여 전기장 그리고 그 표면을 통과하는 전기전속에 대한 평가를 가능하게 합니다.

④ 전기 변위장 (Electric displacement field) $\overrightarrow{D}$

유전체 매질에 전기장 벡터 $\overrightarrow{E}$가 존재하는 경우, 매질 내부에서는 구속전하(원자핵과 그 주변의 전자)들은 국부적인 전기 쌍극자 모멘트(a local electric dipole moment)에 의하여 분극밀도 벡터 $\overrightarrow{P}$를 발생시킵니다. 그러므로 전류를 구성하는 전류밀도 $\overrightarrow{J_T}$는 다음과 같은 성분으로 이루어집니다.

$\overrightarrow{J_T} = \overrightarrow{J_c} + \overrightarrow{J_p}$

$\overrightarrow{J_c} = \rho \overrightarrow{v}$: (conduction current) 전자의 흐름에 의한 전류

$\overrightarrow{J_p} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$: (polarization current) 전기쌍극자 분극에 의한 전류

뒤에서 설명하게 될 맥스웰 방정식의 결과식을 정리하면 아래와 같습니다.

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_T} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

전류밀도 $\overrightarrow{J_T}$를 대입하여 정리하면

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \overrightarrow{J_p} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{P} + \epsilon_0 \overrightarrow{E})$$

위의 식에서 맥스웰은 아래와 같은 새로운 벡터 $\overrightarrow{D}$를 정의하였습니다.

$$\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$$

벡터 $\overrightarrow{D}$를 대입하여 정리하면 맥스웰방정식은 다음과 같아집니다.

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

전기 변위장을 표기되는 벡터 $\overrightarrow{D}$는 맥스웰 방정식에서 나타납니다. 이는 매질 내부에 있는 구속전하를 설명하기 위한 것으로 이는 유전체 내부에서 변위전류와 관련된 항으로서 “D"는 ” 변위(displacement)"를 의미합니다.

유전체의 매질 내부가 아닌 자유공간에서는 구속전하가 없으므로 분극 밀도 벡터 $\overrightarrow{P}$가 0이므로 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$\overrightarrow{D} \equiv \epsilon_0 \overrightarrow{E}$$

⑤ 쿨롱의 법칙과 가우스법칙의 활용

► 쿨롱의 법칙 활용

거리가 r 떨어진 $+Q_1$, $+Q_2$ 두 전하 사이에 작용하는 힘 $\overrightarrow{F}$는 다음과 같습니다.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 * Q_2}{r^2}$$

여기서 Q_2를 단위전하라 하면, 즉, $Q_2 = 1[C]$이면, $\overrightarrow{E}$는 다음과 같습니다.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

► 벡터 $\vec{D}$를 이용한 가우스법칙의 활용

전기변위장(Electric displacement field) $\vec{D}$는 자유공간에서는 다음과 같은 자속밀도(Electric flux density)에 해당합니다.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

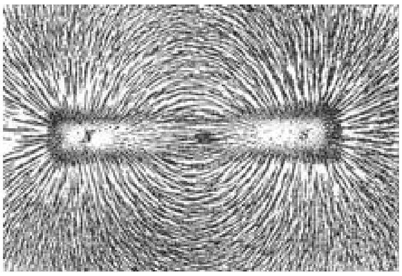
$+Q$의 전하가 존재하는 공간에서 거리 r만큼 떨어진 구의 표면적에서 가우스 법칙을 적용하면 다음과 같아집니다.

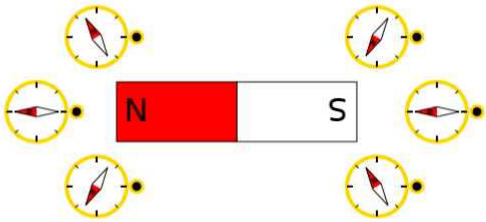
$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \vec{D} 4\pi r^2$$

그러므로, $\vec{D}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

⑥ 자기장 선속(Magnetic field lines)





자기장 선속의 방향은 막대자석 위에 종이를 놓고 철가루를 뿌리면 철가루가 배열하는 것으로부터 알 수 있습니다. 철가루의 양극에 대한 상호 인력은 결과적으로 “선속(field line)"을 따라 철가루가 무리지어 연장배열을 형성하도록 합니다. 이러한 현상은 나침반의 바늘 배열에 의해서도 확인할 수 있습니다. 나침반은 바늘이 위치하는 그 위치 즉, 특정지역에서의 자기장의 방향을 보여줍니다. 주변의 자기상 선의 밀도가 높다는 것은 자기장의 크기가 강한다는 것을 나타내 줍니다. 자기 극(magnetic poles)은 서로 떨어져서 존재할 수 없습니다. 즉, 모든 자석은 북/남극을 쌍으로 가지며, 쪼깨지면 북/남극의 쌍으로 두 개의 자석을 만들어 냅니다. 그러므로 모든 자기선속은 어떠한 주어진 영역 안으로 들어가면 반드시 그 영역을 떠나야 한다는 것을 의미합니다. 즉, 들어가는 자기선속과 나오는 자기선속을 빼면 0이 됩니다.

주어진 면적을 관통하여 흐르는 자기장 선속의 총수를 자속(magnetic flux)이라고 합니다. 자기쌍극자는 자기장 $\vec{B}$를 생성합니다. 이러한 방법에서 발생하는 자속밀도 $\vec{B}$의 가장 중요한 성질은 결코 시작과 끝이 없다는 것입니다. 자기선속은 자석의 북극에서 출발하여 그것의 남극으로 들어갑니다. 그리고 자석 내부에서 자기선속은 계속해서 남극에서 북극으로 계속 진행합니다. 결과적으로 자석의 외부에서는 북(N) 방향에서 남(S) 방향으로 자석내부에서는 남-방향에서 북-방향으로 진행하게 됩니다.

자기장 선속밀도(magnetic field density)를 벡터 $\vec{B}$라고 하면 자속의 총량은 다음과 같습니다.

$$\Psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

여기서 Ψ는 곡면 S를 통과하는 총자속의 양입니다. 실험적으로 가우스법칙에서와 같은 독립된 자화가 존재하지 않으므로 자속에 대한 가우스 법칙은 다음과 같습니다.

$$\Psi = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

모든 자기선속은 어떠한 주어진 영역 안으로 들어가면 반드시 그 영역을 떠난다는 것을 의미합니다. 즉, 들어가는 선과 나오는 선을 빼면 0이 됩니다.

● 외르스테드 법칙

외르스테드 [Hans Christian Oersted, 1777.8.14-1851.3.9] 덴마크의 물리학자 ·화학자. 전기화학에서 전류의 물리적 연구로 방향을 바꾸어, 외르스테드의 법칙을 발견했고, D.F.J.아라고 등이 전자기학을 이루는 단서를 열었다. 자기장의 세기의 단위인 에르스텟(Oe)은 그의 이름을 딴 것이다.

외르스테드는 1820년 3월21일, 배터리의 스위치를 동작시킬 때 자기 북극으로부터 나침반이 변형되는 것을 발견하였는데 이를 외르스테드의 법칙이라고 합니다. 이 법칙은 전기장과 자기장 사이의 직접적인 관계를 있음을 확인시켜 주었습니다. 이후, D.F.J. 아라고, A.M. 앙페르, M. 패러데이, W.E. 베버 등이 전자기학을 발전시켰습니다.

● 비오-사바르 법칙(Biot-Savart law)

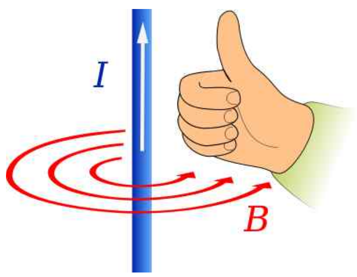
비오-사바르 법칙(Biot-Savart Law)의 1820년 프랑스의 물리학자 Jean-Baptiste Biot (21 April 1774 - 3 February 1862)와 그의 동료 Félix Savart 가 제시한 법칙으로 비오(Biot)와 그의 동료 사바르(Félix Savart)의 연구를 기려 명명된 것입니다.

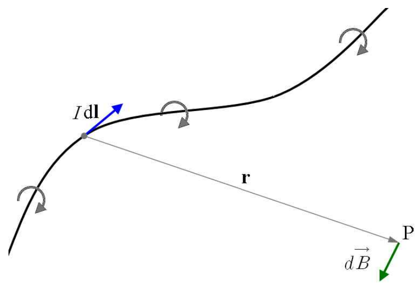
비오-사바르 법칙은 전류에 의하여 발생하는 자속밀도 벡터 $\vec{B}$에 대하여 설명하는 전자기학의 방정식입니다. 벡터 $\vec{B}$는 크기, 방향, 길이, 그리고 전류의 가까움에 의존하며, 또한 자기상수라고 불리는 기본상수에 의존합니다.

비오(Jean-Baptiste Biot, 1774.4.21 - 1862.2.3) 프랑스의 물리학자, 천문학자, 수학자로서 운석의 현실성, 풍선비행의 용이성, 빛의 편관에 대하여 연구. 사바르(Félix Savart) 비오의 협력자로서 자기학과 전류에 대한 이론을 같이 연구하였다. 그들의 연구는 1820년경에 발전되었으며, 비오-사바르법칙은 자기장과 그것의 근원이 되는 전류와 관련하는 법칙이다.

어떠한 임의의 점 P에서 축척되지도 감소되지도 않는 전하의 일정한 흐름에 의하여 정전류 I가 흐를 때 정상상태의 자기장이 발생합니다. 즉, 전자와 같이 운동하는 모든 움직이는 전하입자는 자기장을 생성합니다. 자기장의 방향은 오른손의 법칙("right hand grip rule")으로부터 결정되며, 자기장의 세기는 전류선로에서 떨어진 거리에 따라 감소합니다.

“전선에 전류가 흐르면 주위의 바늘이 움직인다.”는 실험을 통하여 미소 정전류 $I\vec{dl}$이 존재한다고 가정할 때, 거리 r 떨어진 P 위치에서 발생하는 자속밀도 $\overrightarrow{dB}$는 다음과 같이 표현됩니다.





$$\overrightarrow{B} = \frac{u_o}{4\pi}\int \frac{Idl \times \hat{r}}{r^2}$$

여기서 I는 전류, $\vec{dl}$은 전류가 흐르는 도체의 미소길이로서 크기는 1이면서 전류의 방향을 나타내며, u_0는 자기상수로서 자유공간에서 $u_0 = 4\pi \times 10^{-7}$의 값을 가지며, r은 자기장을 계산하고자 하는 위치 P와 벡터 $\vec{dl}$ 사이의 길이, 벡터 $\hat{r}$은 r방향의 단위벡터를 나타냅니다.

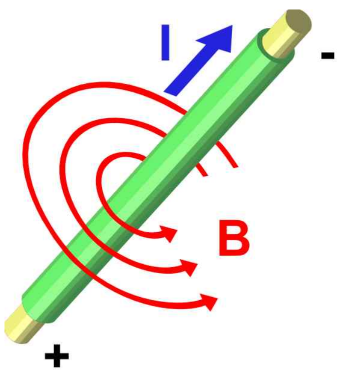
자속밀도의 크기를 계산하기 위해서는 공간에 한 점을 위치시키고, 한 점에서의 미소전류에 의한 자속밀도의 세기를 계산한 후, 전류 경로에 대해서 적분을 수행하여야 합니다. 즉, 자속밀도의 크기는 각각의 미소 전류구간에 의하여 만들어지는 각각의 자속밀도의 벡터 총합이 됩니다.

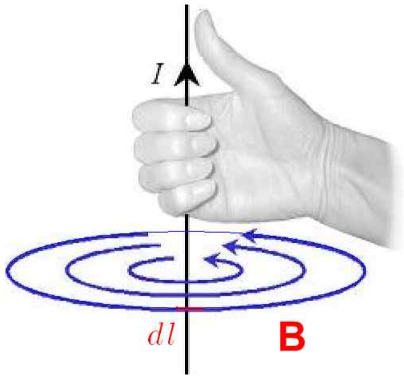
● 암페어 주회법칙(Ampère's circuital law)

“전류는 자기장을 생성한다.”는 물리현상에서 출발하여 1826년 프랑스 물리학자 암페어가 발견한 법칙으로 “폐 경로를 따라 경로상의 자기장의 세기를 내적 적분값은 그 폐경로에 의하여 이루어지는 면적를 관통하여 흐르는 전류의 크기와 같다.”는 것을 의미합니다.

암페어(André-Marie Ampère, 1775.1.20 - 1836.6.10) 프랑스의 물리학자, 수학자로서 일반적으로 전자기학의 주요 발명가의 한명으로 여겨진다.

암페어 주회법칙의 내용을 설명하면 다음과 같습니다.





암페어는 전류가 흐르는 도선과 관련된 자기장 실험을 통하여 다음과 같은 암페어 법칙을 제시하였습니다.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

여기서

$\oint$는 폐곡선 C를 따르는 폐경로 선적분

$\vec{B}$는 자속밀도 벡터

$\cdot$ 는 벡터의 내적(dot product)

$d\vec{l}$ 은 경로 C의 미소 요소(infinitesimal element)

I 폐곡선 C로 이루어지는 곡면 S를 통과하여 흐르는 순 전류의 총합

$\oint$의 계산결과와 폐곡선 C로 이루어지는 곡면 S의 계산을 위한 벡터방향은 오른손 법칙(right-hand rule)을 적용하여 결정합니다. 즉, 오른손 둘째(index-finger)가 선적분의 방향을 지시한다고 하면, 오른손 첫째(thumb)가 뻗어지는 방향이 면 벡터 $d\vec{S}$의 방향을 나타냅니다. 면의 벡터 $d\vec{S}$의 방향과 전류의 방향이 같으면 양의 값이 됩니다.

● 자화(Magnetization)

자화 $\overrightarrow{M}$은 얼마나 강력하게 매질이 자화되는가를 나타냅니다. 일반적으로 주어진 매질에서의 자화는 주어진 영역에서의 체적당 알짜(net)의 자기 쌍극자로서 정의됩니다. 자화 $\overrightarrow{M}$의 선속은 남극으로부터 북극으로 이동합니다. 이는 $\overrightarrow{B}$와는 달리 자석 매질의 내부에서만 존재합니다. 그러므로 자화선속은 자석의 내부 S극의 근처에서 시작하여 자석의 내부 N에서 끝이 납니다.

물리적으로 자화를 표현하는 정확한 방법은 자화(magnetization)를 생성하는 쌍극자 모멘트의 전류를 모두 합하는 것입니다.

● 자기장 세기(magnetic field intensity) $\overrightarrow{H}$

자기장 $\overrightarrow{B}$가 매질의 내부에 인가될 때, 매질 내부에서 매질의 자기장에 대하여 회전 반응하면서 자화 벡터 $\overrightarrow{M}$이 발생하게 됩니다. 이는 자하전류 $\vec{J}_m$에 의하여 발생하는데 이들의 관계식은 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \overrightarrow{M} = \vec{J}_m$$

자기장을 구성하는 전류밀도는 다음과 같이 구성됩니다.

$\vec{J}_T = \vec{J}_c + \vec{J}_m$

$\vec{J}_c = \rho \vec{v}$: (conduction current) 전자의 흐름에 의한 전류

$\vec{J}_m = \nabla \times \overrightarrow{M}$: (magnetization current) 매질의 자하에 의한 구속전류

맥스웰 방정식의 결과 식을 쓰면 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \vec{J}_T + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

전류밀도 $\vec{J}_T$를 대입하여 정리하면

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \vec{J}_c + \vec{J}_m + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \vec{J}_c + \nabla \times \overrightarrow{M} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}) = \vec{J}_c + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

위와 같은 자기장의 수식에서 맥스웰은 아래와 같은 새로운 벡터 $\overrightarrow{H}$를 정의하였습니다.

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$$

자성체가 존재하지 않는 자유공간에서는 자하매질이 없으므로 자하 벡터 $\overrightarrow{M}$이 0이므로 다음과 같은 식이 성립하게 됩니다.

$$\overrightarrow{B} \equiv \mu_0 \overrightarrow{H}$$

벡터 $\overrightarrow{H}$를 대입하여 정리하면 맥스웰방정식은 다음과 같이 정리됩니다.

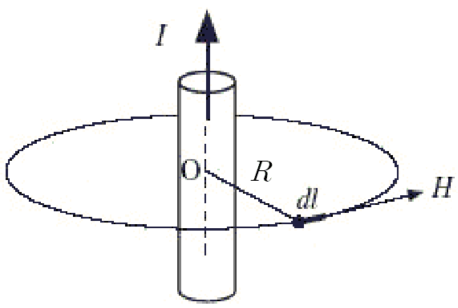
$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

자기장 세기 $\overrightarrow{H}$는 자화력(magnetizing force)의 양을 나타냅니다. 이는 도체의 길이에 비례합니다. 그리고 그 도체를 통과하여 흐르는 전류의 양에 비례합니다. 그러므로 자기장 밀도 $\overrightarrow{B}$는 물체에서 유도되는 자화력의 세기로서 자화력 $\overrightarrow{H}$의 함수가 됩니다.

$\overrightarrow{H}$의 선은 자극(magnetic poles)의 N극에서 시작해서 자극의 S극에서 끝이 납니다. 반면에 $\overrightarrow{B}$의 선은 결코 끊어짐이 없습니다. 그러므로 $\overrightarrow{H}$의 선은 전기장의 양의 전하에서 시작하여 음의 전하에서 끝나는 전기장의 $\overrightarrow{E}$와 유사한 형태가 됩니다.

● 암페어 법칙과 비오-사바르 법칙의 활용

예) 무한 직선 선전류 I가 흐르는 공간에서 자속밀도를 계산하시오.



① 암페어 법칙 적용

도체를 둘러쌓은 반지름 R인 원의 형상으로 폐루프 C를 구성한 후, 보조방정식 $\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$이 적용된 암페어 법칙을 적용하면 다음과 같습니다.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

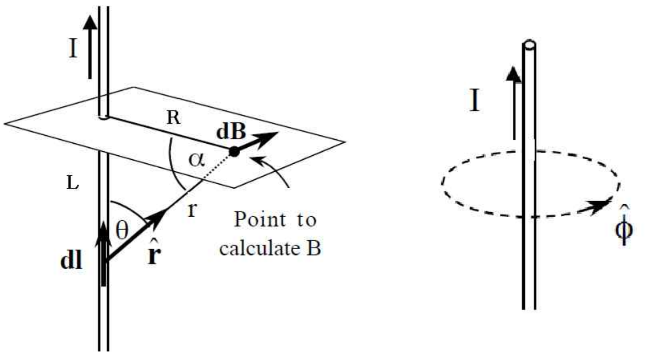
$$\vec{H} 2\pi R \hat{\phi} = I$$

그러므로 반지름 R인 경로상에서 자기장 세기 $\vec{H}$는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{\phi}$$

② 비오-사바르 법칙 활용

그림과 같은 무한 선전류에 대하여 비오-사바르 법칙을 적용하면 다음과 같습니다.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

벡터연산 외적(cross product)을 적용하면 $d\vec{l} \times \vec{r} = dl\sin\theta$이 되며, 자속밀도 $\vec{B}$의 방향은 방위각(azimutal)인 $\hat{\phi}$방향이 됩니다.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}d\hat{\phi}$$

$L/R = \tan\alpha$, $dl = R\sec^2\alpha\, d\alpha$, $r = R\sec\alpha$($\cos\alpha = R/r$), $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$를 적분식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(R\sec^2\alpha\, d\alpha)\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{(R\sec\alpha)^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\cos\alpha}{R}d\alpha$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int \cos\alpha \, d\alpha$$

무한 선전류의 경우, $\alpha = -\pi/2$ 에서 $\alpha = \pi/2$이므로 적분하면 다음식이 유도됩니다.

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

2-4 유전율과 투자율

① 유전율 [誘電率, permittivity, dielectric Constant]

유전체 매질에 전기장 벡터 $\overrightarrow{E}$가 존재하는 경우, 매질 내부에서의 구속전하(원자핵과 그 주변의 전자)들은 국부적인 전기 쌍극자 모멘트(a local electric dipole moment)에 의하여 분극밀도 벡터 $\overrightarrow{P}$를 발생시킵니다. 그러므로 전류를 구성하는 전류밀도 $\overrightarrow{J_T}$는 다음과 같은 성분으로 이루어지게 됩니다.

$\overrightarrow{J_T} = \overrightarrow{J_c} + \overrightarrow{J_p}$

$\overrightarrow{J_c} = \rho \overrightarrow{v}$: (conduction current) 전자의 흐름에 의한 전류

$\overrightarrow{J_p} = \dfrac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$: (polarization current) 매질의 전기쌍극자 분극에 의한 전류

맥스웰은 분극에 의한 전류항을 방정식에 대입하여 다음과 같이 정리하였습니다.

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_T} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

전류밀도 $\overrightarrow{J_T}$를 대입하여 정리하면

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \overrightarrow{J_p} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \overrightarrow{J_c} + \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{P} + \epsilon_0 \overrightarrow{E})$$

이 됩니다. 위의 결과 식으로부터 맥스웰은 다음과 같은 전기변위장 벡터 $\overrightarrow{D}$를 정의하였습니다.

$$\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$$

전기변위장 벡터는 전기장을 만드는 전하량과 관계되는 양입니다. 따라서 일정한 전하량이

있을 경우 유전율이 높을수록 전기장은 작아집니다. 이는 유전체내에서 유전분극이 증가하는 것을 의미합니다. 유전분극 $\vec{P}$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

여기서, 전기감수율 χ(카이)와 유전율 ϵ(엡실론)의 관계는 다음과 같습니다.

$$\epsilon = \epsilon_0 (\chi + 1)$$

즉, 전기감수율이 높을수록 유전분극이 증가하고, 유전율이 증가하면 전기장은 작아집니다. 진공에서 유전율을 ϵ_0로 나타내며 값은 다음과 같습니다.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8.8542 \times 10^{-12} \ [F/m]$$

여기서 c는 빛의 속도이고, μ_0(뮤 제로)는 진공에서의 투자율입니다. F는 패러드로 축전용량을 나타내고 m은 길이의 단위로서 미터를 사용합니다. 진공에서의 유전율은 완전한 진공을 만들 수 없기 때문에 측정할 수 없으며 플랑크와 같은 물리학자들의 연구를 통해서 계산된 값이 됩니다.

매질에서의 유전율과 진공에서의 유전율에 대한 비율을 유전상수(dielectric constant) ϵ_r이라 하면 다음과 같이 정의됩니다.

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \qquad \epsilon = \epsilon_0 (\chi + 1) \quad \epsilon_r = 1 + \chi$$

유전체의 유전율 = 진공유전율 * 비유전율(=상대유전상수)

공기의 유전상수는 1.0005, 테프론 2, 종이는 3, 석영유리 3.5-4.0, 운모 6.0-8.0, 암염 5.9, 고무는 7, 비닐은 5-8, 규소 11.7, 메탄올은 30, 물은 80 정도의 값이 됩니다.

전하를 저장하는데 사용되는 장치를 축전기(capacitor)라고 부릅니다. 일반적으로 이들은 반대부호의 전하로 대전된 두 이웃한 도체로 구성됩니다. 우리가 “축전기의 전하량이 Q이다.”라고 할 때, 이는 축전기의 한 도체가 +Q, 나머지 도체가 -Q의 전하를 띠고 있다는 뜻이 됩니다. 이와 같이 전하를 저장할 수 있는 능력을 정전용량(capacitance)이라고 합니다. 정전용량은 축전기의 형태와 사용된 절연체의 재료에 의하여 결정됩니다. 축전기의 두 판사이의 전위차를 V, 충전 전하량을 Q라고 할 때, 전위차 V에 대한 전하 Q의 비례상수를 축전기의 전기용량 C라 하는데 다음과 같은 관계를 가지게 됩니다.

$$C = Q/V$$

단위로는 Q는 [Coulomb], V는 [Volt]로 주어지므로 C의 단위는 [Coulomb/Volt]가 됩니다. 이 C의 단위는 Michael Faraday의 이름을 따서 [Farad]라고도 합니다.

축전기의 두 판 사이에 절연체가 삽입되면 축전기의 전기용량은 증가하게 됩니다. 이런 절연체들을 유전물질 또는 유전체(dielectric)라고 합니다. 이러한 유전체가 있음으로써 축전기의 전기용량이 증가할 뿐만 아니라 훨씬 높은 전압에도 축전기가 견딜 수 있게 됩니다. 이 축전기의 전기용량이 증가하는 효과는 유전체의 분극성(Polarization)에서 기인하는데, 원자나 분자로 이루어진 유전체는 평상시에는 전기적으로 중성이지만 전기장 속에 놓이게 되면 분극현상이 일어납니다. 즉 전자는 축전기의 +극으로 대전된 판 쪽으로 이끌리게 되고 핵은 -극으로 대전된 판 쪽으로 이끌리게 됩니다. 이에 의해 전기장 $\vec{E_i}$가 원래의 전기장 $\vec{E}$의 반대방향으로 생성됩니다. 즉, 유전체 외부에서 전기장을 가하면 유전분극 현상이 일어나 가해진 외부 전기장에 반대방향으로 분극에 의한 전기장이 생깁니다. 결과적으로 유전체 내부에서는 전기장의 세기가 작아지게 됩니다. 이때 작아진 비율이 유전율이 됩니다. 유전율이 높다는 것은 절연성능이 우수한다는 것을 의미합니다. 즉, 유전율은 전기장이 지나갈 때 얼마나 잘 지나가는지, 상쇄되진 않는지 결정해주는 물리량을 나타냅니다. 또한, 유전율은 분극이 얼마나 잘 일어나는지에 대한 정도를 나타내어 줍니다.

② 투자율 [透磁率, magnetic permeability]

자기장 $\vec{B}$가 매질에 인가될 때, 매질 내부에서 매질의 자기장에 대하여 회전 반응하면서 자화 벡터 $\vec{M}$이 발생하게 됩니다. 이로부터 자하전류 $\vec{J_m}$이 발생하는데 관계식은 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J_m}$$

자기장을 구성하는 전류밀도는 다음과 같이 구성됩니다.

$\vec{J_T} = \vec{J_c} + \vec{J_m}$
$\vec{J_c} = \rho \vec{v}$: (conduction current) 전자의 흐름에 의한 전류
$\vec{J_m} = \nabla \times \vec{M}$: (magnetization current) 매질의 자하에 의한 구속전류

맥스웰 방정식의 결과 식을 쓰면 아래와 같습니다.

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J_T} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

전류밀도 $\overrightarrow{J_T}$를 대입하여 정리하면

$$\nabla\times\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}=\overrightarrow{J_c}+\overrightarrow{J_m}+\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}=\overrightarrow{J_c}+\nabla\times\overrightarrow{M}+\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\times(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}-\overrightarrow{M})=\overrightarrow{J_c}+\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$$

이 됩니다. 여기서 맥스웰은 다음과 같은 새로운 벡터 $\overrightarrow{H}$를 정의하였습니다.

$$\overrightarrow{H}=\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}-\overrightarrow{M}$$

자성체가 존재하지 않는 자유공간에서는 자하매질이 없으므로 자하 벡터 $\overrightarrow{M}$는 0이 됩니다.

일반적으로 전자석을 만들 때, 불에 달구어 식힌 못에 코일을 감아서 건전지를 연결합니다. 이때 못이 있는 것과 없는 것은 엄청난 차이를 발생시킵니다. 자기장을 만드는 것은 전류가 흐르는 코일이지만, 그 안에 들어있는 못이 코일이 만든 자기장에 의해 자화가 되기 때문입니다. 자화된 못이 만드는 자기장은 코일이 만드는 자기장보다 훨씬 크게 됩니다.

솔레노이드 코일의 중심에서의 자기장은 아래와 같이 코일이 만드는 자기장과 자화된 못이 만드는 자기장의 합이 됩니다.

$$\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B_{app}}+\mu_0\overrightarrow{M}$$

여기서

$\overrightarrow{B_{app}}=\mu_0 NL$ 전류가 흐르는 솔레노이드에 의한 자기장

$\mu_0\overrightarrow{M}$: 못의 자화에 의한 자기장(강자성체의 경우, $\overrightarrow{B_{app}}$보다 수 천배 커질 수 있음)

$\overrightarrow{M}$: 외부자기장에 의해서 매질이 자화(자기쌍극자가 일렬로 배열되어 자석처럼 되는 현상)을 나타냅니다.

자화의 세기는 단위부피당 알짜 자기쌍극자모멘트로 주어지며 수식 $\overrightarrow{M}=\chi_m(\frac{\overrightarrow{B_{app}}}{\mu_0})$으로 정의됩니다. 여기서, χ_m은 차원이 없는 양으로 자화율(magnetic susceptibility)이라고 합니다.

자기장의 세기와 관련된 수식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\vec{B} = \vec{B}_{app} + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_{app} + \chi m \vec{B}_{app} = \vec{B}_{app}(1+\chi m) = \mu_0 NL(1+\chi m) = \mu NL$$

여기서, $\mu = \mu_0(1+\chi m)$를 매질의 투자율이라고 합니다. 상대투자율을 K_m이라고 하면 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$K_m = \mu/\mu_0 = (1+\chi m) = \vec{B}/\vec{B}_{app}$$

상대 투자율(relative permeability) K_m은 임의의 매질의 투자율 μ와 진공 중에서의 투자율 μ_0 사이의 비를 나타냅니다. 이 값의 외부자기장($\vec{B}_{app}$)과 매질의 자화에 의해 생기는 매질 내부의 자기장에 대한 상대적인 비를 의미합니다. 즉, 투자율이 크다는 것은 솔레노이드 속에 들어있는 물질이 자화가 잘 된다는 것을 의미합니다. 투자율 μ_0의 단위와 같은 다음과 같습니다.

SI 단위계에서 $[weber/ampere.meter]$=$[Henry/meter]$이다.
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad [T{\cdot}m/A]$

투자율은 자기장이 투과할 수 있는 가능성의 정도를 설명해 주는 물리량을 말합니다. 즉, 자기장의 영향을 받아 자화할 때에 생기는 자기력선속밀도(磁氣力線束密度)와 자기장의 진공 중에서의 세기의 비를 나타냅니다. 보통의 물질, 즉 상자성체(常磁性體), 반자성체에서는 거의 1에 가깝고, 그 값도 물질의 종류에 따라 정해지는데, 철 등의 강자성체나 페리자성체 등에서는 매우 큰 값을 가집니다. 이들 값은 자성체의 자기적인 이력(履歷)이나 자기장의 세기에 따라 변하게 됩니다.

매질이 자화되는 이유는 원자 단위로 생각하여야 합니다. 자석은 일정한 원자배열로써 전자가 돌면서 자기력선을 형성하게 됩니다. 이때 그 전자의 방향이 거의 일치 되어서 한쪽 방향은 N극을 또 다른 방향은 S극을 가지게 됩니다. 이러한 이유로 자석은 쪼개도 N극과 S극이 공존하게 됩니다. 자화되지 않는 물질들은 원자배열이 불안정하여 전자가 원자핵을 돌아도 자기장이 상쇄되면서 자체 자기력선을 만들지 못하기 때문입니다.

자속밀도란 단위면적당 투과되는 자기력선의 수를 의미하기 때문에, 인가한 자기력선에 비해 자속밀도가 높고 낮음을 투자율이라는 상수로 표현하고 있는 것으로, 자성체에 자기력선을 투과시킬 때 자성체 내부에 존재하는 자기력선이 얼마만큼의 밀도를 가지게 되느냐를 말하는 것입니다. 자기장이 어떤 매질에 있을 때, 투자율 μ가 매질에 따라 다르기 때문에 자기장의 세기를 나타내기 위한 새로운 벡터 $\vec{H}$를 정의하여 사용하게 됩니다.

③ 빛의 속도 c

빛의 속도(모든 종류의 전자기파의 속도)는 진공에서 정확히 초속 299,792,458 미터입니다. 이 속도는 1초에 지구를 일곱 바퀴 반을 돌 수 있고 지구에서 달까지 가는 데는 약 1.4초 정

도 소요됩니다. 태양까지는 약 8분 12초 거리입니다. 진공에서 빛의 속도를 흔히 c로 표현합니다.

맥스웰의 이론에 의하면 빛의 속도는 다음과 같이 주어집니다.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

여기서 ϵ_0와 μ_0는 각각 진공의 유전율(permittivity)과 투자율(permeability)이고 다음과 같이 정의 됩니다.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \qquad [A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}],\ [Fm^{-1}]$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad [kg\, m s^{-2} A^{-2}],\ [NA^{-2}]$$

이는 움직이거나 정지한 관측자에 관계없이 일정한 값을 가집니다. 이 같은 사실에서 특수상대론이 출현했습니다. 빛의 속도를 측정한 중요한 실험으로는 다음과 같은 것이 있습니다.

► 갈릴레오 갈릴레이의 실험 : 멀리 떨어진 두 관측자 A, B가 있을 때, A가 보낸 빛을 B가 본 즉시 다시 보내어 A가 볼 때의 시간차를 측정했으나 빛의 속도가 너무 빨라서 유한한 값을 얻지 못했습니다. 이러한 이유로 한때는 빛의 속도가 무한하거나 그 당시의 기술로는 잴 수 없을만큼 빠르다고 생각했습니다.
► 1676년 덴마크의 뢰머의 실험 : 목성의 위성 이오가 목성의 그림자 속에서 들어가는 현상을 발견하였습니다. 그 시간을 예측하였으나 예측한 시간보다 약 22분(실제로는 16분 36초) 늦게 위성이 목성의 그림자 속으로 들어갔다고 합니다. (1000 초 정도) 이것은 빛이 지구에 오는 동안 지구가 공전하여 생기는 거리(지구가 목성과 가까워 질 때의 거리와 멀어질 때의 거리 차이)의 차이 때문이라고 예측하고 최초로 광속도를 과학적으로 측정하였습니다. 측정 속도는 2.10×10^^{8} m/s(현재의 측정값에 비해 30% 오차)였습니다.
► 피조의 실험 : 회전하는 톱니바퀴를 이용해 특정 진동수에서 눈에 어둡게 보인다는 것을 알아내었습니다. 이 결과를 통해 빛의 속도를 구하였습니다. 측정 속도는 3.18×10^^{8} m/s (현재의 측정값에 비해 10% 오차)였습니다.
► 마이켈슨-몰리의 실험 : 빛의 간섭을 이용하여 실험하였습니다. 빛의 방향을 바꾸어 가면서 지구자전의 영향을 측정했으나 무관한 것으로 결론지어졌습니다. 현재 가장 정확한 실험은 마이켈슨-몰리 실험의 변형입니다. 측정 속도는 대략 2.99792458×10^^{8} m/s가 됩니다.

2-5 미분연산자, 발산정리, 경사, 회전, 스토크스 정리

① 델(Del) 미분연산자(differential operator)

나블라(Nabla)는 기호(symbol) ▽를 의미합니다. 어원은 형상이 비슷한 하프(Harp)를 의미하는 그리스어에서 유래되었습니다. 벡터해석에서 이용되는 델(Del)은 미분계산을 수행하는 미분연산자를 의미하는데 나블라라는 기호를 이용하여 다음과 같이 사용됩니다.

미분연산자 델(Del)의 정의

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

미분연산자 델(Del)을 이용하여 발산정리를 표현하는 경우 아래와 같이 정리됩니다. 임의의 벡터 $\overrightarrow{D}$가 다음과 같이 표현된다고 하면,

$$\overrightarrow{D} = D_x\hat{a}_x + D_y\hat{a}_y + D_z\hat{a}_z$$

벡터 $\overrightarrow{D}$에 대한 발산 즉, $div\overrightarrow{D} \equiv \nabla \cdot \overrightarrow{D}$ 는 다음과 같이 간단하게 정리됩니다.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right) \cdot \left(D_x\hat{a}_x + D_y\hat{a}_y + D_z\hat{a}_z\right)$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

② 발산(divergence) 정리

임의의 체적 외부경계 즉, 폐곡면에서 전속밀도를 적분하면 그 폐곡면 내부에 존재하는 전하량의 합과 같다는 가우스법칙(Gauss law)이 발산정리를 통하여 변화(적분형에서 미분형으로 표현)합니다. 가우스 법칙과 발산정리를 정리하면 아래와 같습니다.

가우스 법칙 $\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds} = Q$

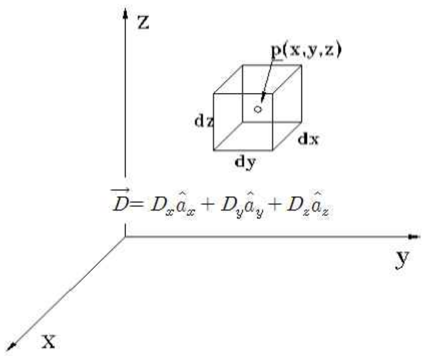
$$\overrightarrow{D}\text{의 발산} \equiv div\ \overrightarrow{D} \equiv \nabla \cdot \overrightarrow{D} \equiv \lim_{dv \to 0} \frac{\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds}}{dv}$$

가우스법칙과 발산정리로부터 다음과 같은 맥스웰방정식이 유도됩니다.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \lim_{dv \to 0} \frac{\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds}}{dv} = \lim_{dv \to 0} \frac{Q}{dv} = \rho_v$$

즉, 폐곡면을 구성하는 미소체적의 크기를 0으로 접근시키면 체적내부에 존재하는 전하량 Q는 체적 전하밀도 ρ_v가 됩니다.

발산정리는 임의의 체적에서 체적을 구성하는 폐곡면에서의 벡터 $\overrightarrow{D}$와 폐곡면의 벡터 $\overrightarrow{ds}$와의 내적 적분을 체적(극한을 취하여 체적의 크기를 0으로 보냄)의 크기로 나누는 개념을 보여주고 있는데 발산정리를 유도하면 다음과 같습니다.



공간상의 임의의 한 점 $p(x,y,z)$에서 벡터 $\overrightarrow{D}$가 다음과 같이 표현된다고 가정합니다.

$$\overrightarrow{D} = D_x\hat{a}_x + D_y\hat{a}_y + D_z\hat{a}_z$$

임의의 한 점 $p(x,y,z)$를 중심으로 하고 한 변의 길이가 dx, dy, dz인 그림과 같은 미소 정육면체를 생각하면, 정육면체의 6개의 표면에서 벡터 $\overrightarrow{D}$를 내적 적분하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{전} + \int_{후} + \int_{좌} + \int_{우} + \int_{상} + \int_{하}$$

먼저 $+x$방향의 $\int_{전}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같아집니다.

$$\int_{전} = \overrightarrow{D}_{전} \cdot \overrightarrow{ds}_{전}$$
$$= \overrightarrow{D}_{전} \cdot dydz * \hat{a}_x$$

여기서 $+x$방향으로 $dx/2$만큼 떨어진 미소면적 $dy*dz$의 크기를 가지는 미소표면 $\overrightarrow{ds}_{전}$의 전체면에서 자속밀도 벡터 $\overrightarrow{D}$성분이 동일하지는 않겠지만, $+x$방향과의 내적연산을 용이하게 하기위하여 자속밀도 벡터의 성분이 $\overrightarrow{D}_{전,x}$으로 일정하다고 가정하면 내적연산의 결과는 다음과 같이 정리됩니다.

$$\cong D_{전,x}*dydz$$

여기서 $D_{전,x}$는 점 $p(x,y,z)$로부터 $+x$방향으로 $dx/2$만큼 떨어져 위치하므로 고차항을 무시하고 테일러급수($a=\frac{1}{2}dx$)를 적용하면 다음과 같이 정리됩니다. 점 p에서의 벡터함수를 $+\frac{1}{2}dx$만큼 떨어진 위치에서 계산하려면 테일러급수를 이용하여 고차함수로 급수전개하는 방법을 적용하면 가능하기 때문입니다.

$$D_{전,x} \cong D_x + \left(D_x 의\ x 에\ 대한\ 변화율 * \frac{dx}{2}\right)$$
$$\cong D_x + \ \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

따라서 $+x$방향의 $\int_{전}$에 대한 적분결과는 다음과 같이 정리됩니다.

$$\int_{전} \cong \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)*dydz$$

동일한 방법으로 $-x$방향의 $\int_{후}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\int_{후} \cong \overrightarrow{D}_{후} \cdot \overrightarrow{ds}_{후}$$
$$\cong \overrightarrow{D}_{후} \cdot \left(dy*dz*(-)\hat{a}_x\right)$$
$$\cong (-)D_{후,x}*dydz$$

여기서 $D_{후,x}$는 다음과 같이 계산이 가능합니다.

$$D_{후,x} \cong D_x + \left(D_x 의\ x 에\ 대한\ 변화율 \times (-)\frac{dx}{2}\right)$$

$$\cong D_x - \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

따라서 $-x$방향의 $\int_{후}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\int_{후} \cong \left(-D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) * dydz$$

x 방향에 대한 적분 $\int_{전} + \int_{후}$를 계산하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\int_{전} + \int_{후} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x} * dxdydz$$

같은 방법으로, $\int_{좌} + \int_{우}$, $\int_{상} + \int_{하}$를 계산하면 다음과 같습니다.

$$\int_{좌} + \int_{우} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y} * dxdydz$$

$$\int_{상} + \int_{하} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z} * dxdydz$$

결과적으로 $\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_{전} + \int_{후} + \int_{좌} + \int_{우} + \int_{상} + \int_{하}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) * dxdydz$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) * dv$$

위의 식에서 정육면체의 미소 체적 $dv = (dxdydz)$이 작아질수록 결과값의 정확도는 높아지는 것을 알 수 있습니다. 따라서 미소체적 dv를 0으로 하는 극한값을 취하여 수식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \cong \frac{\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds}}{dv}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}= \lim_{dv\to 0}\frac{\oint_s \vec{D}\cdot \vec{ds}}{dv}$$

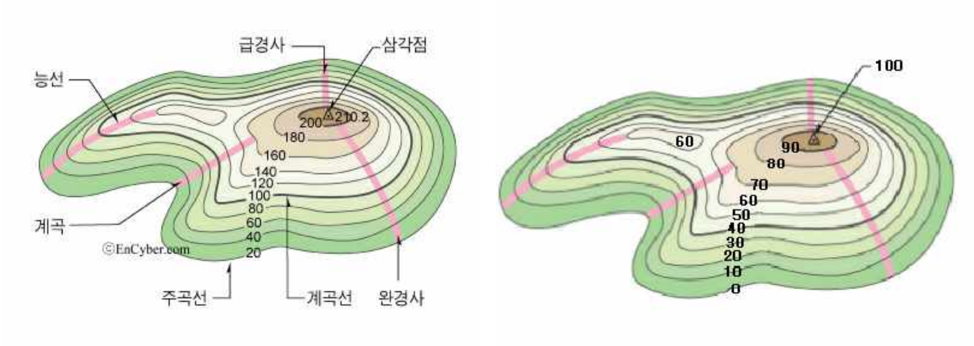
델(Del) 미분 연산자를 이용하여 위의 식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\lim_{dv\to 0}\frac{\oint_s \vec{D}\cdot \vec{ds}}{dv} \equiv \vec{D}\text{의 발산} \equiv div\vec{D} \equiv \nabla\cdot\vec{D}$$

벡터 $\vec{D}$의 발산은 미소 체적의 크기를 매우 작게 할 때, 미소체적의 내부로부터 밖으로 나가는 전속밀도 벡터 $\vec{D}$와 폐곡면을 구성하는 곡면법선 벡터 $\vec{ds}$와의 내적(Dot Product)적분을 수행하는 것을 의미합니다.

③ 경사(gradient) 정리

아래의 지도 등고선으로부터 경사(Gradient, 경도, 기울기)의 개념을 정리하겠습니다. 지도 등고선에서 간격이 좁아지면 지면이 급경사를 이루고 있음을 알 수 있습니다. 만약에 정상에서 물을 부었다고 가정하면 물은 매 순간 급경사의 능선을 찾아서 흘러가게 될 것입니다.



정상의 위치 즉, 삼각점에 전압(Voltage) 혹은 전위(Potential) $+100\,V$를 인가하고 외부경계면에 전위를 $0\,V$를 위치시키면 등고선과 같은 형태로 등전위가 분포됩니다. 이러한 등전위선에 수직하는 방향으로 장(field)의 방향을 정하고 등고선의 간격을 이용하여 세기를 구성해주면 이것을 전기장의 세기 벡터라고 하며 $\vec{E}$로 표현합니다. 등전위선의 수직방향으로 구성되는 벡터의 장 $\vec{E}$을 구하는 것이 경사(Gradient, 경도, 기울기)입니다.

전기장 내에서 단위전하가 가지는 위치에너지가 전위라고 합니다. 그러므로 임의의 한 점 B(시점)에서 다른 한 점 A(종점)으로 단위 양전하를 이동시키는데 외부에서 일을 해주어야 한다면, 전위차는 다음과 같이 정의됩니다. (-)부호는 외부에서 일을 해준다고 하면 전위차는 음수가 된다는 것을 의미합니다.

$$전위차 = V = -\int_{시점}^{종점} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

해석영역에서 전위 V에 대한 수직방향 즉, 최대변화율을 구하는 것이 전기장의 세기 벡터 $\vec{E}$를 구하는 것이 되는데 이를 수식으로 표현하면 아래와 같습니다.

$$\vec{E} \equiv -\frac{dV}{dl}\mid_{\max}\hat{a}_n$$

여기서, l은 등전위 사이의 거리, max는 등전위의 거리가 최소인 경우, 법선벡터 $\hat{a}_n$는 등전위면에 수직이며 전위가 증가하는 방향을 가지는 단위벡터를 의미합니다.

벡터 $\vec{E}$의 크기는 전위 V의 위치에 따른 최대변화와 같고, 방향은 등전위면의 전위가 감소하는 수직방향이 됩니다. 이러한 현상은 수식에서 $-\frac{dV}{dl}\mid_{\max}$의 $d\vec{l}$이 $\hat{a}_n$방향에 있을 때 발생하므로 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dl}\mid_{\max}\hat{a}_n = -\frac{dV}{dN}\hat{a}_n$$

전위 V와 같은 스칼라 장(field)에서 전기장 세기 벡터 $\vec{E}$와 같은 벡터장(field)을 계산해 내는 방법이 벡터해석에서 경사(Gradient)이론입니다. 정의식은 다음과 같습니다.

$$Grad\,T = \frac{dT}{dN}\hat{a}_n$$

이를 전위 V의 스칼라 장과 전기장 세기 $\vec{E}$ 벡터장에 대하여 적용하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$\vec{E} = -Grad\,V = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right)V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right)$$

④ 회전(Curl)정리

임의의 폐경로에서 구성하고 그 폐경로 상에서의 자속의 세기를 선적분하면 그 폐경로로 이루어지는 단면을 통과하여 흐르는 전류의 크기와 같다는 암페어 주회법칙(Ampere Circular law) $\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 이 회전정리를 통하여 변화(적분형에서 미분형으로 표현)하게 되는데 아래에서 정리해 보겠습니다.

회전정리는 정의식은 다음과 같습니다.

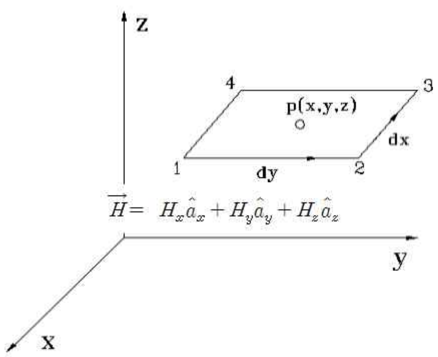
$$Curl\,\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds}$$

회전은 미소 폐경로에서의 벡터 $\vec{H}$의 내적적분을 폐경로로 이루어진 면적(미소면적이 0 이 되는 극한을 취함)으로 나눈 것을 의미합니다. 이러한 회전정리를 암페어 주회법칙을 적용하면 다음과 같은 맥스웰방정식이 유도됩니다.

$$(\nabla \times \vec{H})_n = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint_{s_n} \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds_n} = \lim_{ds \to 0} \frac{I}{ds_n} = j_n$$

폐경로을 구성하는 미소면적의 크기가 0으로 접근하면 면적내부에 존재하는 전류 I의 크기는 전류밀도 j_s가 됩니다. 여기서, n은 폐경로로 만들어지는 면의 법선방향을 의미합니다.

회전의 정리는 아래와 같이 유도할 수 있습니다.



임의의 한 점 $p(x,y,z)$에서 벡터 $\vec{H}$가 다음과 같이 표현된다고 가정합니다.

$$\vec{H} = H_x\hat{a}_x + H_y\hat{a}_y + H_z\hat{a}_z$$

한 점 $p(x,y,z)$를 중심으로 하고 한 변의 길이가 dx, dy인 그림과 같은 미소 정육각형에서

회전(Curl)의 개념을 유도하기 위하여 적분영역을 아래와 같이 나누어 계산을 수행합니다.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$$

먼저, $+y$방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2}$을 계산하기 위하여 $+y$방향의 $d\vec{l}_{1-2}$ 선적분 구간에서의 벡터의 $+y$성분이 $H_{y,1-2}$로 일정하다고 가정하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} \cong H_{y,1-2} {}^* dy$$

여기서 $H_{y,1-2}$는 고차항을 무시하고 테일러(Tayler) 급수를 적용하는 경우, 다음과 같이 표현할 수 있습니다. 점 1에서 2까지의 선분에서의 자기장의 세기는 각각의 위치에 따라 다르지만, 점 p에서 $+\frac{1}{2}dx$만큼 떨어진 위치에서의 값을 모두 동일하게 가진다고 가정을 하고 정리하면 다음과 같습니다.

$$H_{y,1-2} \cong H_y + \left(H_y\text{의 } x\text{에 대한 변화율} \times (\frac{dx}{2})\right)$$

$$H_{y,1-2} \cong H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}(\frac{dx}{2})$$

결과적으로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} \cong \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) {}^* dy$$

동일한 방법으로 $-y$방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$을 계산하면

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} \cong H_{y,3-4} {}^* (-)dy$$

여기서, $\vec{H}_{y,3-4}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$H_{y,3-4} \cong H_y + \left(H_y\text{의 } x\text{에 대한 변화율} \times (-\frac{dx}{2})\right)$$

$$H_{y,3-4} \cong H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}(\frac{dx}{2})$$

그러므로 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$는 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{L})_{3-4} \cong -\left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy$$

동일한 방법으로 $-x$방향의 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$을 계산하면 다음과 같습니다.

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} \cong H_{x,2-3} * (-)dx$$

여기서, $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$H_{x,2-3} \cong H_x + \left(H_x\text{의 } y\text{에 대한 변화율} \times (\frac{dy}{2})\right)$$

$$H_{x,2-3} \cong H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}(\frac{dy}{2})$$

그러므로

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{L})_{2-3} \cong -\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) * dx$$

마지막으로 $+x$방향의 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$을 정리하면 다음과 같습니다.

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \cong H_{x,4-1} * dx$$

그러므로 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$는 다음과 같이 정리됩니다.

$$H_{x,4-1} \cong H_x + \left(H_x\text{의 } y\text{에 대한 변화율} \times (-\frac{dy}{2})\right)$$

$$H_{x,4-1} \cong H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}(\frac{dy}{2})$$

그러므로

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{L})_{4-1} \cong \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) * dx$$

그러므로 4개의 적분결과를 모두 더하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$$

$$\cong \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) * dy - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) * dx - \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy$$

$$+ \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) * dx$$

$$\cong 2 * \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} * \frac{dx}{2} * dy\right) - 2 * \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} * \frac{dy}{2} * dx\right)$$

$$\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} \cong \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) * dxdy$$

계산의 정확도를 높이기 위하여 미소면적에 대한 극한을 취하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$\lim_{dx, dy \to 0} \frac{\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}}{dxdy} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

위의 식을 미분연산자 델(Del)을 이용하면 표현하면 다음과 같습니다.

$$Curl\, \overrightarrow{H} = \nabla \times \overrightarrow{H} = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}}{ds}$$

암페어 주회법칙 $\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = I$에서 미소면적을 0으로 만드는 극한을 취하면 전류밀도가 됩니다. 즉, 회전정리를 적용하면 $+z$방향을 향하는 전류밀도 j_z의 값이 구해집니다. 해석하고자 하는 형상이 3차원 형상이라고 가정하면 전류밀도는 j_x, j_y, j_z등 3개의 성분이 존재하게 됩니다. 3차원에 대한 회전정리의 일반형은 다음과 같이 표현됩니다.

$$(\nabla \times \overrightarrow{H})_n = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint_{s_n} \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}}{ds_n} = \lim_{ds \to 0} \frac{I}{ds_n} = j_n$$

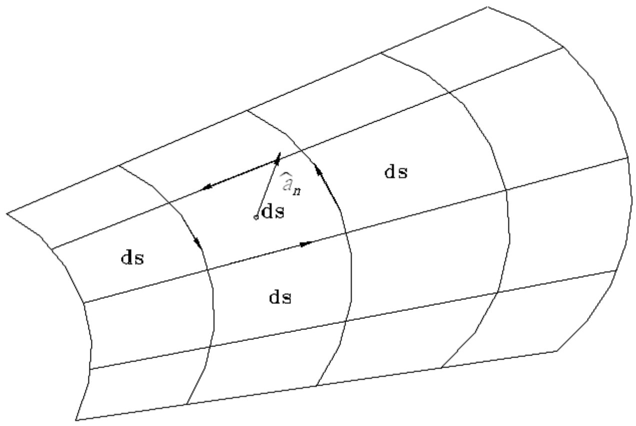
여기서, n은 폐경로로 만들어지는 면의 법선방향을 의미합니다. 직교좌표를 적용하여 회전정리를 정리하면 다음과 같은 최종식이 유도됩니다.

$$Curl\,\overrightarrow{H} = \ \nabla \times \overrightarrow{H} = \ \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

위의 회전 정리 결과식은 다음과 같은 행렬식의 형태로도 표현하는 것이 가능합니다.

$$Curl\overrightarrow{H} = \ \nabla \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

⑤ 스토크스(Stokes)의 정리



위의 그림과 같은 해석표면 ds에 대하여 회전(Curl)의 정리를 적용하고자 합니다.

$$\frac{\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}_{ds}}{ds_n} \doteq (\nabla \times \overrightarrow{H})_n$$

여기서 $d\vec{l}_{ds}$는 해석 표면 ds의 경계선을 나타냅니다.

$$\frac{\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}_{ds}}{ds_n} \doteq (\nabla \times \overrightarrow{H}) \cdot \hat{a}n$$

$$\oint_{l} \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}_{ds} \doteq (\nabla \times \overrightarrow{H}) \cdot \hat{a}_n ds = (\nabla \times \overrightarrow{H}) \cdot \overrightarrow{ds}$$

결과적으로 위의 식은 다음과 같은 식으로 변환이 가능해집니다.

$$\oint_{l} \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = \int_{s} (\nabla \times \overrightarrow{H}) \cdot \overrightarrow{ds}$$

스토크스(Stokes)의 정리는 임의의 해석영역에서의 회전에 대한 면적 적분을 해석영역 경계에서의 폐경로 내적 적분으로 변환하여 계산을 가능하게 해주는 특징을 가지고 있습니다.

2-6 맥스웰 방정식(Maxwell Equation)의 정리

전기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q = \int_v \rho dv \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \qquad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{2}$$

다음으로 자기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \qquad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{4}$$

각각의 식에 대한 내용을 아래에서 설명하고자 합니다.

① 식 (1)의 설명

가우스(Gauss 법칙)의 법칙을 수식으로 표현한 것으로 " 어떤 임의의 폐곡면을 통과하는 전속은 이 폐곡면 내부에 존재하는 전체 전하량과 같다."는 것을 의미합니다. 가우스의 법칙과 발산정리를 이용하면 다음과 같은 전기장에 대한 맥스웰 방정식을 유도할 수 있습니다.

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{D}) dv = \int_v \rho dv$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

② 식 (2)의 설명

전기장의 내부에서 단위 전하를 임의의 폐경로를 따라 일주시킬 때 소비하는 일의 양은 0이 된다는 것을 수식으로 표현한 것을 의미합니다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

③ 식 (3)의 설명

비오-사바르(Biot-Savart)의 법칙의 미분형은 미소 전류소를 구현할 수 없기 때문에 실험적으로 증명이 불가하지만 미소 전류소에 의한 자기장의 세기는 다음과 같은 식으로 구해진다는

것을 의미합니다.

$$d\overrightarrow{B} = \frac{u_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{a}_R}{R^2}$$

추가적으로, 다음과 같은 비오-사바르 법칙의 적분형은 실험적으로 증명이 가능합니다.

$$\overrightarrow{B} = \frac{u_o}{4\pi}\oint_l \frac{Id\vec{l}\times\hat{a}_R}{R^2}$$

암페어(Ampere)의 주회법칙은 “임의의 폐경로 위에서 자기장의 세기 벡터 $\overrightarrow{H}$에 대한 선적분은 폐경로 내부를 통과하는 전류의 크기와 같다.”는 법칙으로 아래의 수식으로 표현됩니다.

$$\oint_l \overrightarrow{H}\cdot d\vec{l} = I$$

폐경로가 x-y평면에 평행하게 놓일 경우, z방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\oint \overrightarrow{H}\cdot d\vec{l}}{dxdy} \cong \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \cong J_z$$

폐경로가 y-z평면에 평행하게 놓일 경우, x방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\lim_{dy,dz\to 0}\frac{\oint \overrightarrow{H}\cdot d\vec{l}}{dydz} \cong \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cong J_x$$

폐경로가 z-x평면에 평행하게 놓일 경우, y방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\lim_{dz,dx\to 0}\frac{\oint \overrightarrow{H}\cdot d\vec{l}}{dzdx} \cong \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \cong J_y$$

위의 식 3개를 스토크스(Stokes) 정리를 이용하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\oint_l \overrightarrow{H}\cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla\times\overrightarrow{H})\cdot d\overrightarrow{s}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = I = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_s \left(J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z\right) \cdot \vec{ds}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z$$

④ 식 (4)의 설명

자기장에 대한 가우스(Gauss)의 법칙으로 자속선은 항상 폐경로를 형성하면서 존재한다는 것을 의미합니다. 즉, 점전하와 같은 형태의 독립된 자하가 존재하지 않는다는 것을 수식으로 표현한 것입니다.

$$\oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

2-7 포아송(Poisson), 라플라스(Laplace) 방정식 그리고 경계조건

시간에 따라 변하지 않는 정적 전기장의 경우, 관련된 맥스웰 방정식의 미분형과 적분형은 다음과 같습니다.

$$\nabla\cdot\overrightarrow{D}= \rho, \qquad \oint_s \overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_v \rho dv \tag{1}$$

$$\nabla\times\overrightarrow{E}= 0, \qquad \oint_l \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = 0 \tag{2}$$

전기장과 관련된 보조방정식으로는 다음과 같습니다.

$$\overrightarrow{D}= \epsilon\overrightarrow{E}, \qquad \overrightarrow{E}= -\nabla V \tag{3}$$

위의 식들을 이용하면 전기장에 대한 포아송 방정식(Poisson's equation)을 다음과 같이 유도할 수 있습니다.

먼저, 식 (1)에 식(3)을 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\nabla\cdot\epsilon\overrightarrow{E}= \rho \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\epsilon(-\nabla V)= \rho \tag{5}$$

미분연산자 ∇안의 ε의 값이 상수라 가정하면, 미분연산자 ∇의 미분변수 x, y, z와 관계가 없으므로 등호 우측으로 이동이 가능하므로 다음과 같은 포아송방정식이 유도됩니다.

$$\nabla\cdot(\nabla V) \equiv \nabla^2 V= -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{6}$$

만약에 해석영역에서의 전하밀도 ρ가 0인 경우에는 등호 우측이 0이 되는데 이를 라플라스 방정식(Laplace's equation) 이라 합니다.

$$\nabla\cdot(\nabla V) \equiv \nabla^2 V= 0 \tag{7}$$

다음으로 시간에 따라 전기장이 변하는 시변-전기장(time-varying electric field)의 경우에 해당하는 맥스웰방정식은 아래와 같이 유도할 수 있습니다.

시변 전기장의 경우 맥스웰방정식의 유도는 아래와 같은 패러데이(Faraday)의 실험법칙에서 출발합니다.

$$emf= V= -\frac{d\phi}{dt} \tag{8}$$

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \tag{9}$$

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \tag{10}$$

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\int_s (\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}) \cdot d\vec{s} \tag{11}$$

결과적으로 시변-전기장의 경우, 맥스웰방정식은 다음과 같이 수정됩니다.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{12}$$

다음으로 정적 자기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{13}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \qquad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{14}$$

자기 벡터 포텐셜 $\vec{A}$를 이용하여 자기장에 관련된 보조방정식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{15}$$

위의 식들을 이용하여 자기장에 대한 포아송 방정식(Poisson's equation) 유도하면 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}\vec{B} = \vec{J} \tag{16}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J} \tag{17}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \tag{18}$$

자기 벡터 포텐셜 $\vec{A}$에 대해서 다음과 같은 조건을 부여할 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad : \text{쿨롱조건(Coulomb Condition)} \tag{19}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad : \text{로렌쯔조건(Lorentz Condition)} \tag{20}$$

쿨롱조건(Coulomb Condition)을 적용하면 아래와 같은 자기벡터 포텐셜 포아송방정식이 유도됩니다.

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} = -\mu \overrightarrow{J}$$
$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x, \qquad \nabla^2 A_y = -\mu J_y, \qquad \nabla^2 A_z = -\mu J_z \tag{21}$$

시간에 따라 변하는 시변-자장(time-varying magnetic field)의 경우 맥스웰 방정식을 유도하면 다음과 같습니다. 전류연속방정식(체적 v를 통과하는 전류는 체적내의 전하량 감소분과 같다.)을 적용하면 다음과 같은 수식이 유도됩니다.

$$\oint_s \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{ds} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{22}$$

$$\int_v (\nabla \cdot \overrightarrow{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int \rho dv \tag{23}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{24}$$

다음으로 변위전류항에 대하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} \tag{25}$$

벡터항등식과 전류연속방정식을 이용하면 아래의 식과 같이 등호가 성립하지 않음을 알 수 있습니다.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{H}) \equiv 0 \quad \neq \quad \nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{26}$$

수식의 양변을 만족시키기 위하여 임의의 벡터 $\overrightarrow{G}$를 도입하고 정리하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{H}) = \nabla \cdot (\overrightarrow{J} + \overrightarrow{G}) \tag{27}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{H}) = \nabla \cdot \overrightarrow{J} + \nabla \cdot \overrightarrow{G} \tag{28}$$

벡터항등식 $[\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{H}) \equiv 0]$을 적용하면 식 (28)의 우변은 다음을 만족하여야 합니다.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{G} = -\nabla \cdot \overrightarrow{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \overrightarrow{D}) \tag{29}$$

식 (29)로부터 임의의 벡터 $\vec{G}$는 다음과 같이 구해집니다.

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{30}$$

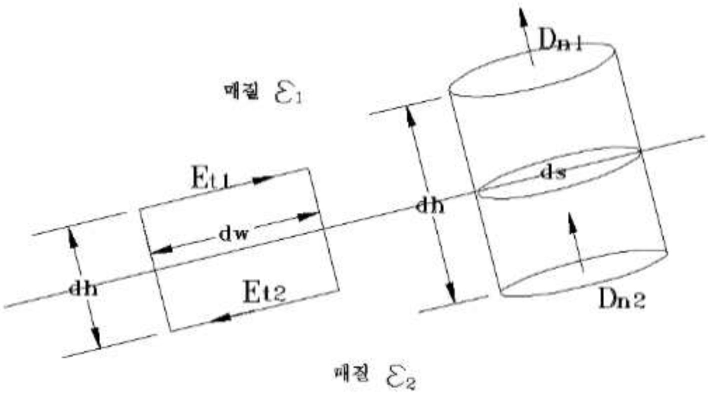
결과적으로 시변 자기장에 대한 멕스웰 방정식은 다음과 같이 수정됩니다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{31}$$

여기서 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$를 변위전류라고 말합니다.

▶ 경계조건

전기장에서의 경계조건을 정리하면 다음과 같습니다.



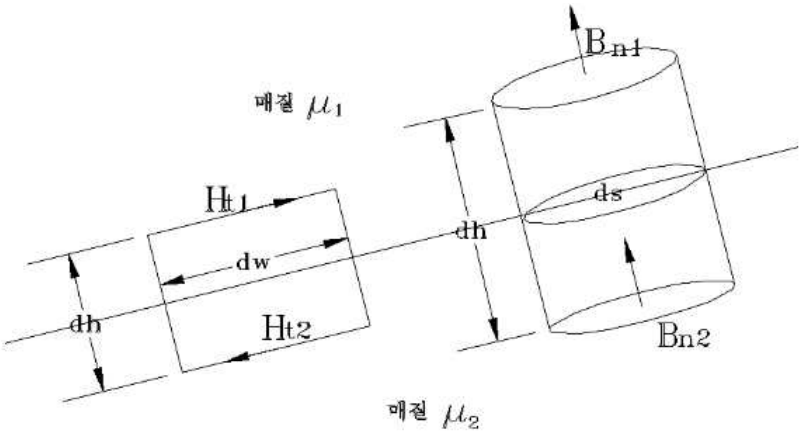
경계면에서의 연속조건을 정리하기 위하여 높이 dh를 0으로 만드는 극한 $\lim_{dh \to 0}$를 적용하면서 회전정리와 발산정리를 적용하면 식 (1), (2)를 거쳐 식 (3)과 같은 경계조건이 정리됩니다.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \qquad \oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = 0 \tag{1}$$

$$E_{t1}dw - E_{t2}dw = 0 \qquad D_{n1}ds - D_{n2}ds = \rho ds \tag{2}$$

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad D_{n1} = E_{n2} \tag{3}$$

자기장에서의 경계조건은 다음과 같이 정리됩니다.



전기장의 경우와 동일한 방법으로 높이 dh를 0으로 만드는 극한 $\lim_{dh \to 0}$ 를 적용하면서 회전정리와 발산정리를 적용하면 식 (4), (5)를 거쳐 식 (6)과 같은 경계조건이 정리됩니다.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{4}$$

$$H_{t1}dw - H_{t2}dw = Kdw \qquad B_{n1}ds - B_{n2}ds = 0 \tag{5}$$

$$H_{t1} - H_{t2} = K \qquad B_{n1} = B_{n2} \tag{6}$$

2-8 R, L, C의 정의 및 전압전류관계식 유도

지금까지 전자기학의 전기벡터장, 자기벡터장 그리고 맥스웰방정식에 대하여 정리하였습니다. 전자기학을 배워야 하는 이유를 이제부터 설명하고자 합니다. 먼저 수학을 배우는 이유에 대하여 다시한번 상기하고자 합니다. 수학을 배우는 이유는 바로 자연현상에 대한 해석을 수행하고 결과를 비교분석하여 인간의 생활에 도움이 되는 물건들을 개발하기 위해서입니다. 그렇다면 인간생활에 도움이 되는 물건 중 전자기학 이론을 적용하여 개발된 것은 무엇이 있을까요. 그것은 바로 모든 전기 전자회로를 구성하는 전압 v, 전류 i, 레지스턴스 R, 커패시턴스 C, 인덕턴스 L에 대한 관계식을 정립해 놓은 것입니다. 먼저 전류, 전류밀도, 전압에 대한 정의를 살펴보고 레지스턴스 R, 커패시턴스 C, 인덕턴스 L에 대하여 정리하겠습니다.

① 전류[電流, electric current]

아래와 같이 단위시간에 이동한 전하량의 양으로 정의합니다.

$$I=\frac{dQ}{dt} \qquad \text{단위, } [A]=\frac{[C]}{[\mathrm{sec}]} \qquad \text{암페어}=\frac{\text{쿨롱}}{\text{초}}$$

전자 1개의 전하량은 $e=1.6\times10^{-19}[C]$, 질량은 $m=9.1\times10^{-31}[kg]$ 이므로 $1[A]$의 전류는 1초에 약 6.25×10^{18}개의 자유전자가 주어진 도체의 면적을 통과하는 것을 의미합니다.

② 전류밀도[電流密度, current density]

전류의 방향에 대해 수직인 단면에서 단위 면적을 통과한 전류의 양으로 정의합니다.

$$J=\frac{I}{A} \qquad \text{단위, } [A/m^2]=\frac{[A]}{[m^2]} \qquad \text{전류밀도}=\frac{\text{전류}}{\text{면적}}$$

③ 전압[電壓, voltage]

도체(導體) 내에 있는 두 점 사이의 전기적인 위치에너지의 차이를 의미합니다. 전위차(電位差)로 정의됩니다. 단위는 볼트 $[V]$. 1[V]는 1[C](쿨롱)의 전하가 두 점 사이에서 이동하였을 때에 하는 일이 1J(줄)일 때의 전위차를 말합니다. 무한대에서 임의의 점 b까지 전하를 이동하는 데 필요한 일은 다음과 같은 관계식으로 정리됩니다.

$$F=qE$$
$$W=F^*l$$
$$W=qE^*l$$

여기서, 전압은 단위전하($q=1$)을 임의의 점 b에서 무한대까지 이동하는데 필요로 하는 일로 정의하며 다음과 같은 수식으로 표현됩니다.

$$V_b = \int_b^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

그러면 전기장에 존재하는 공간에서 두 지점의 전위차는 어떻게 표현될까요 전기장 $\vec{E}$가 존재하는 공간에서 두 지점 a, b의 전압(전위차)은 다음과 같이 표현됩니다.

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

는 크기만을 고려하면 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있습니다.

$$V = \vec{E} * l$$

④ 레지스터(Resistor)의 관계식 유도
  전자기 법칙 중의 하나인 옴의 법칙 (Ohm's law)의 다음과 같습니다.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

여기서, $\vec{J}$는 전류밀도, σ는 전도도, $\vec{E}$는 전기장의 세기를 나타냅니다.
  전압(전위차)의 정의식 $V = \vec{E} * l$에 전류밀도 정의식 $J = \frac{I}{S}$ 그리고 옴의 법칙을 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$V = \vec{E} * l$$
$$V = \frac{\vec{J}}{\sigma} * l$$
$$V = \frac{1}{\sigma} * \frac{I}{S*} l$$
$$V = \frac{l}{\sigma * S} * I$$

  위의 관계식을 간단하게 하기 위하여 변수 R(=Resistance)를 도입하고 다음과 같이 정의합니다.

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

변수 R을 이용하여 주어진 식을 정리하면 다음과 같은 최종식이 주어집니다.

$$V = RI$$

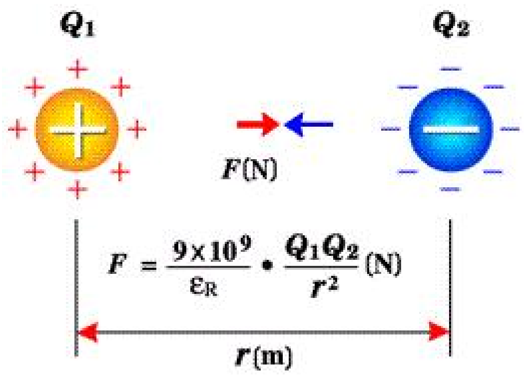
시간에 따라 변하는 경우 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$v(t) = R^* i(t)$$

보통 널리 쓰이는 $V = RI$ 식은 직류전원을 가지는 전기회로에 적용하기 위하여 표현된 식입니다.

⑤ 커패시터(Capacitor)의 관계식 유도

쿨롱의 법칙 (Coulomb's Law)은 아래와 같이 표현됩니다.



$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

여기서 유전율의 값은 $\epsilon = 8.854 \cdot 10^{-12}$이 됩니다.

전기장의 세기(Electric Field intensity) $\vec{E}$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

전기장의 전속밀도(Electric Field Density) $\vec{D}$는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

다음으로 가우스법칙 (Gauss' Law)은 다음과 같이 표현됩니다.

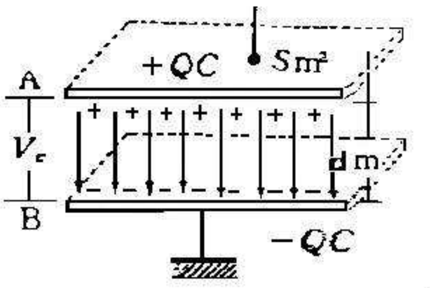
$$Q = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$Q = \vec{D} S$$

마지막으로 전위차 V의 정의식은 다음과 같습니다.

$$V = \vec{E} * l$$

상기 식들을 평행판 커패시터에 적용하면 다음과 같은 식이 유도됩니다.



$$V = \vec{E} * l$$

$$V = \frac{\vec{D}}{\epsilon} * l$$

$$V = \frac{1}{\epsilon} * \frac{Q}{S} * l$$

$$Q = \epsilon \frac{S}{l} * V$$

상기 식의 변형을 위하여 변수 C(capacitance)를 도입하고 다음과 같이 정의합니다.

$$C = \frac{\epsilon S}{l}$$

커패시터에 축적되는 전하량의 식 $Q = C * V$와 전류의 정의식 $I = \frac{dQ}{dt}$를 적용하면 다음과 같은 식이 유도됩니다.

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

여기서, C는 시간에 따라 변하지 말아야 하며, 시간에 따른 변화율이 정의되려면 아래와 같이 시간에 대한 함수로 표현되어야 합니다.

$$i(t) = c\frac{dv(t)}{dt}$$

위의 식을 전압에 대한 관계식으로 변환하면

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)$$

이고, 적분구간을 다음과 같이 나누어 생각하면

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)$$

이 됩니다. 일반적으로 $-\infty < t < 0$인 영역에서의 전류는 관심대상이 아닙니다. 그래서 $-\infty < t < 0$인 영역에서는 커패시터에 충전된 총 전하량 Q_0로 표현하는 것이 가능하므로 상기 식은 다음과 같이 수정이 가능합니다.

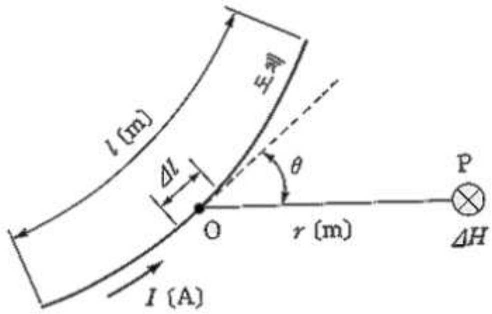
$$v(t) = \frac{1}{C}Q_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)$$

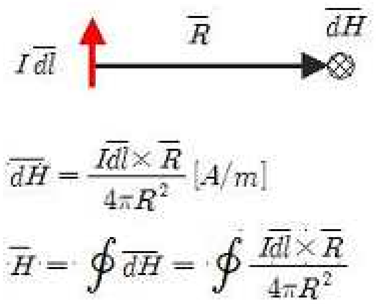
또는

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)$$

⑥ 인덕터 (Inductor)의 관계식 유도

쿨롱 법칙과 가우스 법칙이 전하 분포가 만드는 전기장을 구하는 내용을 담고 있는 법칙이듯이, 비오-사바르 법칙과 암페어 법칙은 전류 분포가 만드는 자기장을 구하는 내용을 담고 있는 법칙입니다. 쿨롱 법칙에 대응하는 것이 비오-사바르의 법칙이고 가우스 법칙에 대응하는 것이 암페어 법칙입니다.





한 점 O에서의 요소전류(크기 I 길이 $\overrightarrow{\Delta L}$)에 의하여 다른 점 P에서 발생하는 자기장의 자속밀도는 아래와 같은 비오-사바르의 법칙(Biot-Savart law)에 의하여 다음과 같이 계산됩니다.

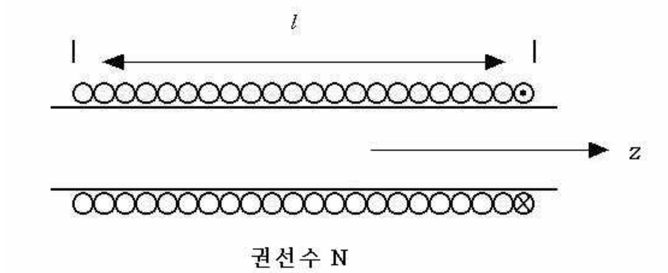
$$d\overrightarrow{B} = \frac{u_o}{4\pi} \frac{Id\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{R}}{R^2}$$

여기서 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$입니다.

전류에 의하여 발새하는 자속의 총수는 다음과 같이 계산됩니다.

$$\Psi = \int_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

위의 관계식을 이상적인 솔레노이드에 대입하여 정리하면 다음식이 유도됩니다.



$$\overrightarrow{H} = \frac{NI}{l}\overrightarrow{z}$$

$$B = \mu \cdot \frac{NI}{l}\overrightarrow{z}$$

솔레노이드 내부에서의 총 자속은 다음과 같습니다.

$$\Psi = N * \overrightarrow{B} * S$$

여기서, N 권선수, $\overrightarrow{B}$ 자속밀도, S 솔레노이드 단면적을 의미합니다. 자속밀도를 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\Psi = N * (\mu \cdot \frac{NI}{l}) * S$$

$$\Psi = (\mu \cdot \frac{N^2}{l} S) * I$$

상기 식을 간단히 하고자 변수 L(inductance)를 아래와 같이 정의합니다.

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

주어진 식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\Psi = LI$$

위의 식을 아래의 파라데이의 법칙(Faraday's law)에 대입하여 정리하면

$$v(t) = \frac{d}{dt} \Psi(t)$$

다음과 같습니다.

$$v(t) = \frac{d}{dt} Li(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(t) dt$$

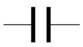
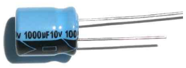
적분구간을 나누어 정리하면 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0} v(t) dt + \frac{1}{L} \int_{0}^{t} v(t) dt$$

일반적으로 $-\infty < t < 0$ 인 영역에서의 전압은 관심대상이 아닙니다. 그래서 $-\infty < t < 0$ 인 영역에서는 리액터에 충전된 자속량 Φ_0로 표현이 가능하므로 주어진 식을 수정하면 다음과 같습니다.

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \Psi_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt$$

지금까지 전자기학의 이론을 이용하여 정의된 회로소자의 정의, 기호 그리고 전압과 전류에 대한 관계식을 정리하면 아래의 표와 같습니다.

용어정의	레지스턴스 Resistance	커패시턴스 Capacitance	인덕턴스 Inductance
정의식	$R = \frac{l}{\sigma S}$	평행판 $C = \frac{\epsilon S}{l}$	솔레노이드 $L = \mu\frac{N^2 S}{l}$
기호			
전압관계식	$v(t) = R^* i(t)$	$v(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt$	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
전류관계식	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$
소자명	레지스터(Resistor)	커패시터(Capacitor)	인덕터(Inductor)
외관			

현재 사용하고 있는 모든 전기 전자제품은 회로소자 R, L, C 그리고 전압 V, 전류 I의 관계식을 이용하여 표현이 가능합니다. 이들 회로소자를 소형의 칩속에 집적해 놓은 것이 집적회로(IC, Integrated circuit)입니다. 추가적으로 반도체 소자들을 이용한 IGBT, IEGT, GTO, IGCT, GCT 등과 같은 전력전자 소자들이 있는데 이러한 모든 소자들도 R, L, C 그리고 전압 V, 전류 I의 관계식으로 표현이 가능해집니다.

3 장 회로해석

3-1 위상차발생

회로소자의 기능을 나타내는 R, L 그리고 C에서 전압 V와 전류 I의 관계식을 정리하면 아래와 같습니다.

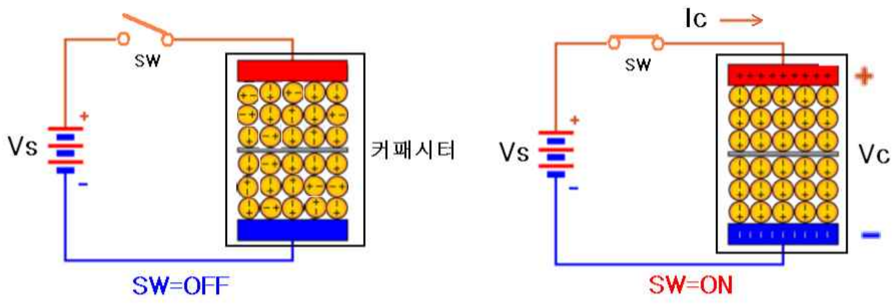
용어정의	레지스턴스 Resistance	커패시턴스 Capacitance	인덕턴스 Inductance
전압관계식	$v(t)= R*i(t)$	$v(t)= \frac{1}{c}\int i(t)dt$	$v(t)= L\frac{di(t)}{dt}$
전류관계식	$i(t)= \frac{1}{R}v(t)$	$i(t)= C\frac{dv(t)}{dt}$	$i(t)= \frac{1}{L}\int v(t)dt$

먼저 즉, 레지스턴스 R의 경우, 전압 V와 전류 I의 관계식이 대수방정식으로 구성되는 것을 볼 수 있고, 커패시턴스 C와 인덕턴스 L은 전압 V와 전류 I에 대한 관계식이 미적분 방정식으로 구성되어 있는 것을 볼 수 있습니다.

전 세계적으로 전기를 만들어 내는 발전기의 전압 V와 전류 I는 일반적으로 정현파(Sin 함수), 여현파(Cos함수) 즉, 삼각함수를 이용하여 표현이 됩니다. 그러면 삼각함수 형태의 전압, 전류 파형을 사용하는 조건에서 “미적분 방정식으로 구성되어 있다.”는 것은 전압과 전류사이의 관계에 위상에 차이가 발생한다는 것을 의미합니다.

커패시턴스 C와 인덕턴스 L에서 위상차가 발생하는 것에 대하여 설명하면 아래와 같습니다.

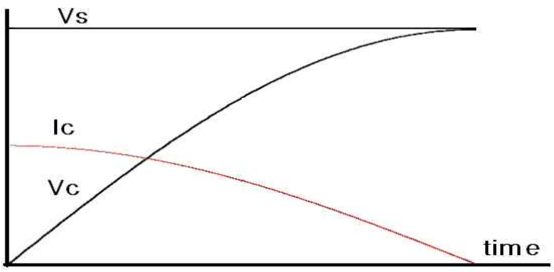
① 커패시터에서의 위상차 발생



▶ 스위치 SW가 OFF 상태에서는 커패시터 내부에 있는 유전체 즉, 유전체를 구성하는 매질에는 분극이 되지 않은 상태를 유지하고 있으므로 임의의 방향으로 분포되어 있음을 알 수 있습니다.

▶ 스위치 SW가 ON 상태가 되면 커패시터의 양극으로 직류전원에 의하여 전압 혹은 전위 V가 인가됩니다. 그러면 유전체 내부에 있는 매질이 직류전원에 의하여 인가되는 전압에 영향

을 받아서 회전이 용이한 매질부터 회전하여 전압의 인가방향으로 회전배열하게 됩니다. 매질의 회전방향은 전원 양극으로는 유전체의 음이온이 배열하고 전원의 음극으로는 유전체의 양이온이 정렬하는 방향입니다. 이렇게 분극이 일어나면 분극이 일어나는 만큼 커패시터의 양극에 전하량을 잡아 축척하게 됩니다. 그러나 전원이 연결된 바로 한 순간 유전체 내부의 매질에서 모든 분극이 이루어지지 않습니다. 점진적으로 분극이 일어나고 시간이 지나면서 유전체의 분극은 포화상태를 유지하게 됩니다. 즉, 유전체 내부의 매질은 회전이 쉬운 분자구조부터 회전 배열하면서 점진적으로 포화상태로 진행하는 것을 의미합니다. 이것을 그림으로 나타내면 아래와 같은 모양이 됩니다.



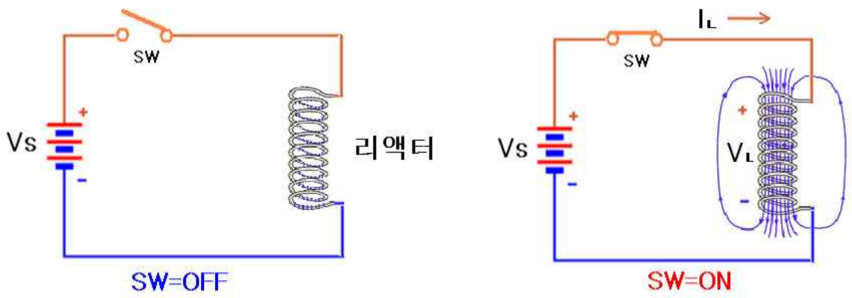
그림에서 Vs는 직류전원 그리고 VC는 커패시터의 양극에 전하가 축적되면서 생성되는 전압의 세기 그리고 유전체 매질의 분극에 의하여 흐르게 되는 전류 IC를 보여주고 있습니다. 여기서 전류 IC는 실제 회로를 통과하여 흐르는 전류가 아니고 유전체 매질의 분극에 의하여 형성되는 전류를 말하는데 전자기학에서는 이를 “변위전류=$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$”라는 용어로 정의하여 사용하고 있습니다.

Vc 와 Ic의 관계를 살펴보면 전류 Ic가 전압 Vc보다 위상이 빠르다는 것을 알 수 있습니다. 위상이 빠르다는 것은 전류 IC는 Cos 함수의 형상을 가지고, 전압 Vc는 Sin 함수의 형상을 가지는데 수학의 삼각함수 이론에 의하면 “Cos 함수는 Sin 함수에 비하여 위상이 90도 빠르다.” 라고 정의하고 있기 때문입니다.(Sin함수가 Cos 함수보다 위상이 270 빠르다라고는 안함.)

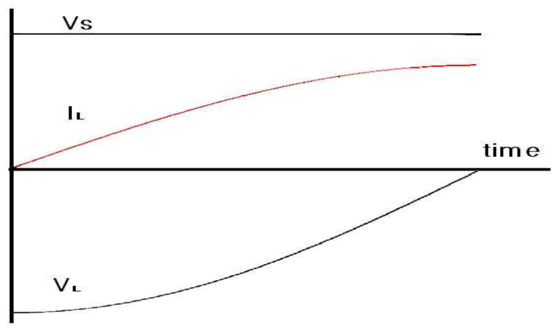
커패시턴스 C는 다음과 같은 두 가지 특징을 가진다는 것을 명심해야 합니다.

커패시터의 전압은 한순간에 변할 수 없음
커패시터에서는 전류가 전압보다 위상이 빠름(I-C-V or I-C-E)

② 리액터에서의 위상차 발생



▶ 스위치 SW가 OFF 상태이면, 리액터 내부에는 자기장이 없는 상태를 유지하게 됩니다.
▶ 스위치 SW가 ON 상태가 되어 리액터에 전류가 흐르면 리액터 내부에 자기장을 발생을 시도합니다. 하지만, 자연계에는 정지한 것은 계속 정지하려고 하고 운동하는 것은 계속해서 운동하려고 하는 관성의 현상이 있습니다. 같은 이유로 리액터의 권선을 통하여 전류가 흐르게 되면 전류에 해당하는 자기장을 만들어 주려고 하지 않고, 자기장의 발생을 억제하려고 하는 움직임이 발생합니다. 즉, 리액터 자체에서는 자기장의 발생을 반대하는 반대방향의 전류(렌쯔의 법칙)를 만들어냅니다. 이러한 역방향 전류에 의하여 발생하는 전압을 “역기전력”이라고 합니다. 결과적으로 리액터내부에서는 전원이 연결되어 전류가 흐르게 되면 전류가 흐르는 바로 그 순간 포화 상태의 자기장을 발생시키지 않고 시간이 지나면서 점진적으로 자기장의 포화상태를 만들어 가는 현상이 발생합니다. 이러한 설명을 그림으로 나타내면 아래와 같습니다.



그림에서 Vs는 직류전원, IL은 직류전원에 의하여 리액터의 내부를 흐르는 전류를 보여주고 있으며, VL은 리액터에서 자기장의 발생을 방해하려고 하는 반대방향의 전류에 의하여 발생하는 역기전력의 모습을 보여주고 있습니다. 역기전력의 작용에 의하여 리액터에 흐르는 전류가 처음에는 0의 값을 가지는 것을 볼 수 있으며, 시간이 지나면서, 역기전력의 크기가 0이 되면서 리액터에 흐르는 전류의 크기가 최대가 되는 것을 볼 수 있습니다.
리액턴스 L에서 VL과 IL의 관계를 살펴보면 커패시턴스 C에서의 특징과는 다르게 전압 VL이 전류 IL보다 위상이 90도 빠르다는 것을 알 수 있습니다. 리액턴스 L은 다음과 같은 두 가지 특징을 가진다는 것을 명심해야 합니다.

리액터의 전류는 한순간에 변할 수 없음
리액터에서는 전압이 전압보다 위상이 빠름(V-L-I)

3-2 $v(t) = \sqrt{2}\,V_{rms}\sin(\omega t)$에 대한 설명

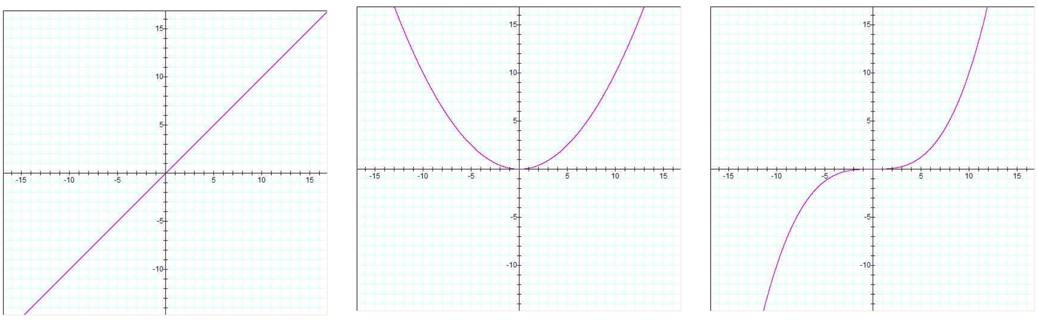
회로이론에 대한 교과목을 학습하다보면 갑자기 아래와 같은 문장이 등장합니다.

“전압 $v(t)$가 $v(t) = \sqrt{2}\,V_{rms}\sin(\omega t)$
전류 $i(t)$가 $i(t) = \sqrt{2}\,I_{rms}\sin(\omega t)$와 같이 주어질 때,
전력 $p(t) = v(t)*i(t)$를 구하라”

왜 전압과 전류가 위의 식과 같이 주어진다고 할까요? 먼저 위의 식을 항별로 나누면 $v(t)$, $\sqrt{2}*V_{rms}$ 그리고 $\sin(wt)$ 등으로 나누어지는데 이들 각각의 항들에 대하여 정리하면 다음과 같습니다.

① 함수 $v(t)$
시간이라는 변수(시간이 변하기 때문)에 대해서 즉, 그대 그때 주어진 시간에 해당하는 전압의 값을 표현하는 함수를 의미합니다. 일반적으로 전기공학에서 접하는 함수로는 $f(x)$, $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, $f(x,y,z,t)$등의 형태가 있습니다.

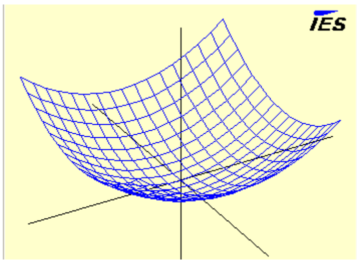
▶ $f(x)$: X축의 직선 혹은 주어진 1차원의 경로에서 그 경로상에서의 어떠한 물리량의 변수 즉, 온도, 압력, 밀도, 강수량, 빛의 세기, 전압, 전류 등등의 값을 2차원 Y축 상으로 표현할 수 있는 것들을 총칭하는 함수의 형태를 말합니다.



$f(x) = x$ $f(x) = 1/10*x^2$ $f(x) = 1/100*x^3$

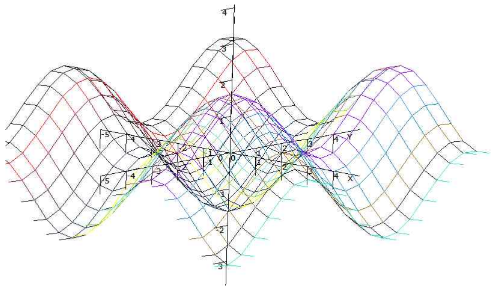
[$NuCalc\quad Version\,2.0$]

▶ $f(x,y)$: $X-Y$평면 혹은 임의의 주어진 평면에서 분포하는 어떠한 물리량의 값 즉, 온도, 압력, 밀도, 강수량, 빛의 세기, 전압, 전류 등등의 값을 3차원 Z축 상으로 표현해서 나타낼 수 있는 것들을 총칭하는 함수의 형태를 말합니다.



$f(x,y) = 0.1*x^2 + 0.1*y^2$

http://www.ies.co.jp/



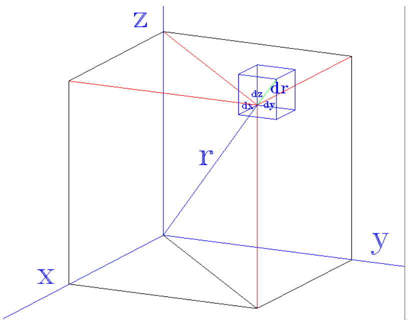
$f(x,y) = \sin(y) - \sin(x)$

[$3D$ *Graph* 2.12]

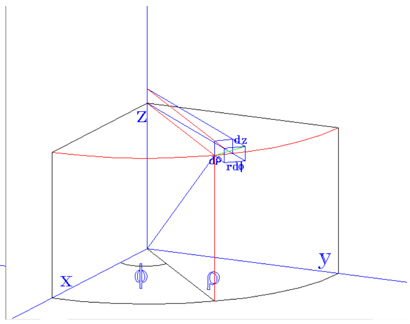
참조 : http://www.ies.co.jp/math/java/misc/SimpleGraph3D/SimpleGraph3D.html

▶ $f(x,y,z)$: 주어진 3차원 $X-Y-Z$ 공간에서 임의의 물리양의 값 즉, 온도, 압력, 밀도, 강수량, 빛의 세기) 등등의 크기를 4차원 공간으로 표현해야 하는 것들을 총칭하는 함수의 형태를 말합니다. 결과값은 4차원 즉, 머릿속의 추상적인 공간에 표현이 됩니다. 수치해석적으로는 공간의 특정 면을 절단한 후, 함수의 값을 $f(x,y)$의 함수형태를 이용하여 표현하는 방법이 개발되어 있습니다.

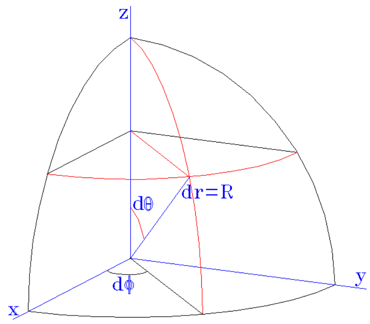
3차원 공간의 공간의 좌표를 표시하는 방법은 아래와 같이 직교좌표, 원통좌표 그리고 구좌표등이 있으며, 물리적 변수의 결과 값은 추상적인 사유의 공간에 그려야 합니다.



직교좌표 변수(x,y,z)



원통좌표 변수(ρ,ϕ,z)



구좌표 변수(r,θ,ϕ)

▶ $f(x,y,z,t)$: 3차원 $X-Y-Z$ 공간에서의 임의의 물리량의 변수 온도, 압력, 밀도, 강수량, 빛의 세기, 전기장, 자기장 등등이 시간 t의 변화에 따라 결과값이 변하는 것들을 표현하는 함수를 총칭합니다. 물리량의 결과값은 추상적인 사유의 공간에 표현하여야 합니다. 수치해석적으로는 특정한 주어진 시간 그리고 주어진 특정한 공간을 절단한 후, 물리량의 결과 값을 $f(x,y)$의 함수 형태를 이용하여 표현하는 방법이 개발되어 있습니다.

주어진 전압의 함수 $v(t)$는 3차원 $X-Y-Z$ 공간에서 변하는 물리량을 표현하는 것이 아닙니다. 공간에 대해서는 의미를 가지지 않고 시간을 변수로 취하는 물리양 즉, 주어진 시간 그 때 그때에 해당하는 전압의 크기를 2차원 Y축 상에 표현할 수 있는 함수의 형태가 된다는 것을 알 수 있습니다.

② $\sqrt{2} * V_{rms}$

위의 식은 "최대값$=\sqrt{2}*$실효값"는 관계를 의미합니다. 즉, V_{rms}라는 것은 실효값을 나타내는데 실효값이라는 것은 "교류에 의하여 저항부하에 공급되는 전력량이 직류에 의하여 저항부하에 공급되는 전력량과 동일하다."는 조건을 만족하는 값을 계산한 것입니다. 직류에 의하여 공급되는 전력량과 교류에 의하여 공급되는 전력량을 계산하여 정리하면 아래와 같습니다.

▶ 직류 전류 I에 의하여 저항 R에 공급되는 전력은 다음과 같이 계산됩니다.

$$P = I^2 R = I_{eff} R$$

그러므로 I_{eff}를 계산하면

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

이 됩니다.

▶ 교류전류 $i(t)$에 의하여 저항 R에 공급되는 전력은 다음과 같이 계산됩니다.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R\, dt = \frac{R}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt$$

여기서 T는 $i(t)$의 주기를 나타낸다. 일반적으로 교류에서는 +구간과 -구간의 값이 동일하기 때문에 1주기에 대하여 적분하면 0이 됩니다. 이를 방지하기 위하여 물리량을 제곱해서 양의 값으로 만든 후 적분을 수행하게 됩니다.

실효값 I_{eff}를 구하기 위하여 전력 P의 공식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T i(t)^2 dt}$$

▶ 교류전류 $i(t) = I_m \sin(\theta)$에 대하여 실효값을 계산하면 아래와 같이 정리됩니다.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T i(t)^2 dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_o^\pi I_m^2 * \sin^2(\theta) dt} \qquad (\sin(\theta))^2 = \sin^2(\theta)$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(\theta) dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))dt} \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} * [\theta - \frac{1}{2}sin2\theta]_0^{\pi}}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} * [\pi - \frac{1}{2}sin(2\pi)]}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} \qquad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

결과적으로 실효값에 $\sqrt{2}$ 를 곱한 값이 최대값 I_m이 되는 것을 알 수 있습니다.

③ $\sin(wt)$

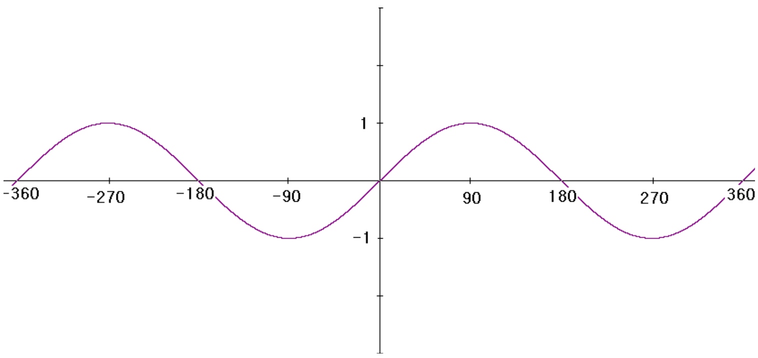
이 식은 호도법(Radian, 라디안)으로 표현되는 삼각함수를 의미합니다. 그러므로 먼저 호도법에 대하여 설명하면 다음과 같습니다.

▶ 호도법(Radian)으로 표현되는 삼각함수

도를 변수로 하는 삼각비 표를 함수식 형태로 표현하면 아래와 같습니다.

$$f(\text{deg}) = \sin(\text{deg.})$$

또한, 삼각비 표의 값을 그래프로 나타내면 다음과 같습니다.



공학에서는 이와 같이 도로 표기되는 삼각비 표의 함수를 사용하지 않고 호도법(radian)로 표현되는 삼각비 표의 함수를 사용합니다. 호도법 즉, 라디안(Radian)은 원둘레의 길이로서 각도를 표현하는 방법입니다.

호도법은 반지름 1인 원을 대상으로 계산합니다. 반지름이 1인 원의 원둘레 길이는 2π가 됩니다. 이러한 결과로부터 간단하게 90도는 1/2π, 180도는 π, 270도는 3/2π 마지막으로 360도는 2π로 변경할 수 있습니다.

호도법을 사용하는 이유는 각도에 대한 계산을 빠르게 이해할 수 있기 때문입니다. 예를 들어 주파수가 60Hz인 시스템이 있을 때, 이 시스템은 1초에 몇 도를 회전하는지를 계산하면

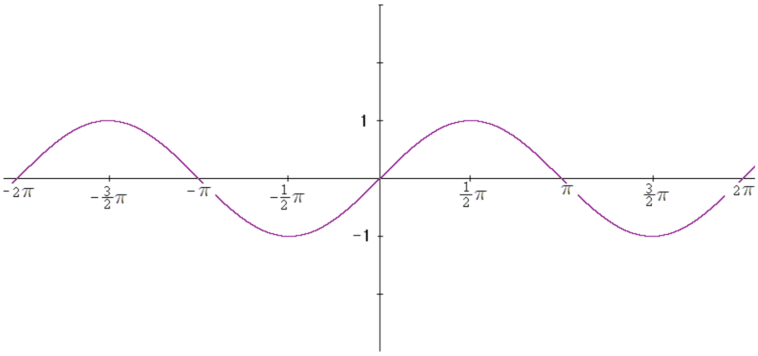
360도/회전*60회전 =21,600도

이 됩니다. 하지만 호도법(라디안)으로 표기하면

$2\pi * 60 = 120\pi$

로 간단하게 표현할 수 있습니다. 라디안으로 표현하는 삼각함수의 함수식과 그래프를 그리면 아래와 같은 형태가 됩니다.

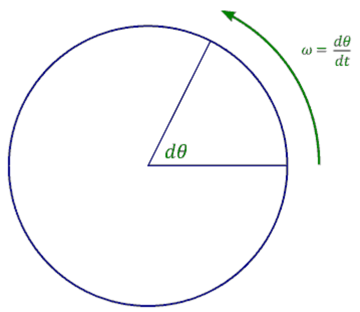
$$f(rad) = \sin(rad)$$



공학용 계산기에서 삼각함수를 계산하는 경우, 사용자가 도를 기준으로 계산을 한다고 하면 계산기를 deg mode로 설정하여야 하며, 라디안으로 계산을 수행하기 원하는 경우, 계산기를 rad mode로 설정하여 계산을 수행해야 합니다.

▶ 각속도 ω로 표현되는 삼각함수

각속도(angular velocity)는 일반적으로 ω로 표현되며 이는 아래 그림과 같이 특정한 점(일반적으로 좌표계의 원점)을 기준으로 각이 돌아가는 속력 즉, 각도의 시간미분을 나타내는 벡터(엄밀히 말하면 벡터는 아님. 유사벡터)입니다.



일반적으로 각속도는 주파수와 라디안의 관계를 이용하여 $\omega = 2\pi f$와 같이 표현할 수 있습니다. 즉, $f = 1Hz$(1초에 1회전하는 시스템)인 경우, 각속도는 $\omega = 2\pi$의 값을 가지며, $f = 60Hz$(1초에 60회전하는 시스템)인 경우, 각속도는 $\omega = 2\pi * 60 = 120\pi = 377$의 값을 가집니다.
대한민국의 경우, 전력발전에 이용되는 발전기의 회전 주파수는 $60Hz$로 고정되어 있기 때문에 각속도는 $\omega = 2\pi * 60 = 120\pi = 377$의 값이 됩니다.

전자기학의 기본 원리에서부터 출발하여 설계 및 개발된 발전기에서 출력되는 전압 그리고 전류의 크기 및 파형의 형태는 삼각함수와 동일한 형태를 가지기 때문에 삼각함수의 수학적 이론을 이용하여 표현됩니다.

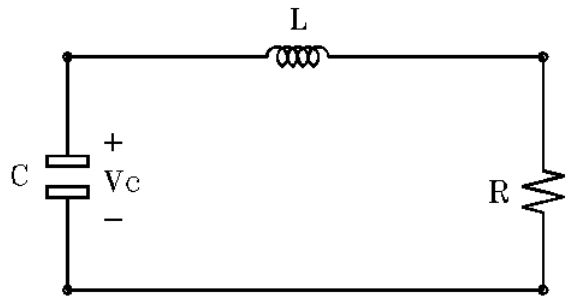
전압과 전류를 곱한 것으로 정의된 전력[$p(t) = v(t) * i(t)$]을 계산하려면 삼각함수의 사칙연산을 수행해야 하는데 이는 매우 귀찮은 작업이 됩니다. 이러한 수식 계산은 아래와 같은 오일러 항등식(항상 성립하는 공식)을 이용하면 쉽게 해석이 가능해 집니다.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

오일러 항등식의 위대함은 삼각함수의 사칙연산을 지수함수의 형태로 변경하여 계산을 가능하게 해 준다는 특징을 가지고 있습니다. 삼각함수의 수학적 공식 및 오일러 항등식 등 수학적인 기법을 이용하여 계산된 결과들을 자연계의 현상과 비교하여 볼 때 동일한 결과가 발생하는 것을 확인할 수 있습니다. 즉, 자연계의 현상을 수학적으로 표현하고 수식 문제를 풀어 최종 결과식을 유도하고 정리하면 이러한 수학적 결과가 자연계에서 그대로 발생하고 있다는 것을 확인할 수 있습니다. 바로 이것이 “수학의 위대성”을 인식을 하는 첫 출발이기도 합니다.

3-3 라플라스 변환을 이용한 R-L-C 직렬회로방정식 해석

라플라스변환을 이용한 회로해석의 예제를 하나 다루어 보고자 합니다.
예] 아래 그림과 같은 RLC 직렬회로에 흐르는 전류 $i(t)$와 커패시터에 충전되는 전압 Vc에 대하여 계산하시요.



커패시터 C가 전압 Vc로 충전되어 있다는 것이 초기조건 입니다. RLC 직렬회로에서 전류 $i(t)$에 대한 KCL 방정식을 구성하면

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt+Ri(t)=0$$

커패시터의 적분구간을 나누어 수직을 정리하면

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)dt+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+Ri(t)=0$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+(\frac{1}{C}*(-)Q)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+Ri(t)=0$$

여기서 $\frac{1}{C}\times -Q$는 커패시터 충전전압 V_c를 나타내므로

$$L\frac{di(t)}{dt}-V_C+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt+Ri(t)=0$$

이 됩니다. 상기 식은 전류에 대한 함수 $i(t)$가 시간변수에 대하여 대수함수, 미분함수 적분함수를 모두 포함하고 있는 미적분 방정식의 형태가 됩니다. 이러한 미적분항은 구성하는 것은 시간변수 t에 의해서입니다. 이러한 시간변수에 대한 미적분방정식을 계산하기 위해서는 시간변수 t를 사라지게 하는 라플라스(Laplace) 변환을 적용하여야 합니다.

라플라스(Laplace) 변환을 적용하면 주어진 미적분 방정식은 다음과 같이 대수방정식으로 변환이 됩니다.

$$L[SI(s)-i(0)]-\frac{V_C}{S}+\frac{1}{SC}I(s)+RI(s)=0$$

$$LSI(s)-Li(0)+RI(s)+\frac{1}{SC}I(s)=\frac{V_C}{S}$$

리액터의 초기조건은 없으므로 즉, 즉, 초기전류는 $i(0)=0$ 이므로

$$LSI(s)+RI(s)+\frac{1}{SC}I(s)=\frac{V_c}{S}$$

가 됩니다. 위의 식을 $I(s)$에 대하여 정리하면

$$(LS+R+\frac{1}{SC})I(s)=\frac{V_c}{S}$$

$$I(s)=\frac{V_c}{S}*(\frac{1}{LS+R\frac{1}{SC}})=\frac{V_c}{S(LS+R+\frac{1}{SC})}=\frac{V_c}{(LS^2+RS+\frac{1}{C})}$$

분모 분자에 $\frac{1}{L}$을 곱하여 정리하면

$$I(s)=\frac{V_c*\frac{1}{L}}{(LS^2+RS+\frac{1}{C})*\frac{1}{L}}=(\frac{\frac{V_c}{L}}{S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}})=\frac{V_c}{L}(\frac{1}{S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}})$$

상시 식을 제곱식으로 변환하면

$$I(s)=\frac{V_c}{L}[\frac{1}{(S+\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}]$$

분모 분자에 $\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$ 를 곱하여 정리하면

$$I(s) = \frac{V_c}{L}\left(\frac{1}{(S+\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}\right)*\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}$$

$$= \frac{V_c}{L}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}{(S+\frac{R}{2L})^2+\sqrt{[\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2]^2}}\right)*\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}$$

$$I(s) = \frac{V_c}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}{(S+\frac{R}{2L})^2+\sqrt{[\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2]^2}}\right)$$

상기 식에 다음과 같은 Laplace 역변환 공식을 적용하면

$$L^{-1}[\frac{\beta}{(S+\alpha)^2+\beta^2}] = e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

전류 $i(t)$는 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$i(t) = \frac{V_c}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

여기서

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$$

이므로, 계수항을 정리하면

$$\frac{V_c}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}} = \frac{V_c}{L}*\frac{1}{\beta} = \frac{V_c}{\beta L}$$

입니다. 분모 분자에 2C를 곱하면

$$\frac{V_c}{\beta L}= \frac{V_c}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}}*\frac{2C}{2C}=\frac{2CV_c}{\sqrt{L^2}*\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}*\sqrt{(2C)^2}}$$

$$= \frac{2CV_c}{\sqrt{L^2*[\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})]^2*4C^2}}=\frac{2CV_c}{\sqrt{L^2*(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2})*4C^2}}$$

$$= \frac{2CV_c}{\sqrt{4L^2C^2*\frac{1}{LC}-4C^2L^2*\frac{R^2}{4L^2}}}$$

$$\frac{V_c}{\beta L}\equiv\frac{2CV_c}{\sqrt{4LC-R^2C^2}}=\frac{2CV_c}{\sqrt{4LC-(RC)^2}}$$

이므로 전류 $i(t)$는 다음과 같은 식으로 정리됩니다.

$$i(t)=\frac{V_c}{\beta L}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

$$i(t)=\frac{2CV_c}{\sqrt{4LC-(RC)^2}}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

여기서

$$\alpha=\frac{R}{2L},\qquad \beta=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$$

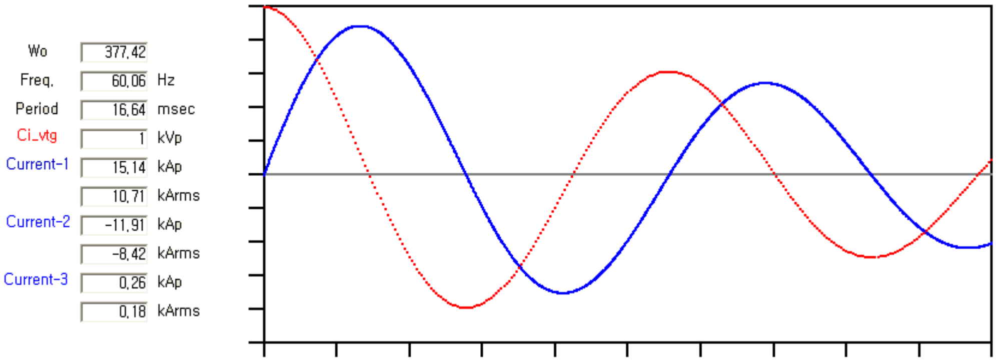
입니다. 시간에 따른 전류 $i(t)$에 대하여 설명을 하면 아래와 같습니다. 먼저 $\sin\beta t$는 크기는 ± 1사이의 값을 가지면서, 주파수는 βt에 의하여 결정되는 sin함수입니다. 그리고 $e^{-\alpha t}$는 $t=0$인 순간에 크기 1을 가지고 시간이 증가함에 따라 값이 감소하는 지수함수입니다. 감소하는 빠르기는 α값에 의하여 결정됩니다. 그러므로 전류 파형의 형태를 설명하면 아래와 같습니다.

$\frac{V_c}{\beta L}\sin\beta t$: 전류의 크기가 최대 최소 $\frac{V_c}{\beta L}$이면서, βt에 의하여 결정된 주파수를 가지는 sin 함수 특성을 가집니다.

$i(t)=\frac{V_c}{\beta L}e^{-\alpha t}\sin\beta t$: 만약에 $\alpha=0$이면, 즉 $R=0$의 값을 가지면 감소하지 않고 진동하는 함수가 되는데, $\alpha\neq 0$이면, 즉 $R\neq 0$이면 시간에 따라 감소하는 지수함수가 곱하여 지므로 시간에 따라 진동하면서 감소하는 함수의 형태를 가지게 됩니다.

C=45000uF, L=0.156mH, R=9mOhm 인 RLC 직렬회로에서 커패시터가 1kV 충전되어 있는 경우, 흐르는 전류의 크기를 구하면 아래의 그림(파랑색)과 같습니다.

주파수는 60H가 되면, 1차 전류크기는 10.7kArms, 2차전류는 -8.4kArms, 3차전류는 0.2kArms의 크기로 감소하는 것을 볼 수 있습니다.



다음으로 전류 $i(t)$에 의하여 커패시터 C에 충전되는 전압은 다음과 같이 계산됩니다. (이하, 커패시터 충전전압 $V_c = V$)

콘덴서 C에 충전되는 전압 $v(t)$는

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

이고, 회로에 흐르는 전류는

$$i(t) = \frac{V}{\beta L}e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

이므로 대입하여 정리하면

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t (\frac{V}{\beta L}e^{-\alpha t}\sin\beta t)dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\int_0^t e^{-\alpha t}\sin\beta t\, dt$$

이 됩니다. 주어진 식에 다음과 같은 부분적분공식을 적용하면

$$\int u'v\, dt = uv - \int uv'\, dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left([\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\beta t]_0^t - \int_0^t \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\beta\cos\beta t\, dt\right)$$

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left(\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha t}\cos\beta t\,dt\right)$$

우변 두 번째항에 정적분을 적용하면

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left(\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha}\left\{[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos\beta t]_0^t - \int_0^t\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}(-)\beta\sin\beta t dt\right\}\right)$$

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left(\begin{array}{l}\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha}([\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos\beta t-\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha 0}\,1]) \\ -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\alpha t}\sin\beta t dt)\end{array}\right)$$

여기서 초기 적분방정식

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\int_0^t e^{-\alpha t}\cdot\sin\beta t\,dt$$

을 적용하면

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}-e^{-\alpha t}(\frac{1}{\alpha}sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha^2}cos\beta t)\right)-\frac{\beta^2}{\alpha^2}v(t)$$

$$(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2})v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}-e^{-\alpha t}(\frac{1}{\alpha}sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha^2}cos\beta t)\right)$$

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}-e^{-\alpha t}(\frac{1}{\alpha}sin\beta t+\frac{\beta}{\alpha^2}cos\beta t)\right)$$

이므로 최종적으로 커패시터에 충전되는 전압 $v(t)$는

$$v(t)=\frac{1}{C}\frac{V}{\beta L}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta-e^{-\alpha t}(\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t)\right)$$

이 되며, 여기서

$$\alpha=\frac{R}{2L},\qquad \beta=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$$

입니다. 시간에 따른 전압 $v(t)$의 파형은 위의 그림에서 빨강색 선으로 그려져 있음을 알 수 있습니다.

4 장 전자기학관련 주요 용어 및 과학자

4-1 전자기학관련 주요 용어에 대한 설명

전자기학과 관련된 주요 용어를 나열하면 아래의 표와 같습니다. 용어에 대한 설명은 다음과 같으며 "네어버 백과사전" 그리고 "위키백과" 사전을 참조하였습니다.

분야	주요 용어
① 전자기학	전기, 전기장, 자기, 자기장
② 정전기장	전하, 전기력선속, 전위, 전기에너지, 정전기유도, 모멘트, 전기쌍극자, 유전율, 유전분극, 쿨롱의 법칙, 가우스의 법칙
③ 정자기장	전류, 자속, 자기력선속밀도, 자화, 자기쌍극자, 자기쌍극자모멘트, 투자율, 비오-사바르의 법칙, 앙페르의 주회법칙, 자기장 가우스의 법칙
④ 전기역학	유도기전력, 변위전류, 전자기장, 전자기복사, 맴돌이전류, 전자기유도, 패러데이의 유도 법칙, 렌츠의 법칙, 로렌츠 힘의 법칙, 맥스웰의 방정식
⑤ 전기 회로	전기전도, 레지스턴스, 커패시턴스, 인덕턴스, 임피던스, 키르히호프의 법칙

① 전자기학(電磁氣學, electromagnetics / electromagnetism)

전기력과 자기력은 근본적으로 같은 힘입니다. 전자석처럼 전기로 자기력을 만들 수 있고, 반대로 발전기처럼 자기력으로 전기를 만들 수도 있습니다. 이와 같이 전기와 자기는 밀접한 관련을 가지고 상호작용하므로 이를 통틀어 전자기라 하고, 이를 연구하는 학문이 전자기학입니다.

전자기현상을 체계적으로 연구하기 시작한 것은 17세기부터입니다. 1785년 쿨롱의 법칙이 발견되면서 전자기현상에 대한 수학적 연구의 기초가 세워집니다. 그리고 1792년의 갈바니전지와 1799년 볼타전지의 발명으로 연속적인 전류가 얻어지게 됩니다. 이후 1820년 외르스테드에 의해 전류의 자기작용이 발견되었고, 1827년 옴의 법칙이 발견되었습니다. 그리고 1831년 패러데이에 의해 전자기유도작용이 발견되는 등 전기와 자기 사이의 밀접한 학문적 체계가 확립되었습니다. 그러나 이때까지도 전기와 자기를 같은 현상으로 파악하지 못하였습니다. 이후, 1873년 맥스웰이 처음으로 전자기장의 개념을 수학적으로 정립하여 전자기파의 존재를 주장하였고, 헤르츠가 이를 실험적으로 입증하였습니다.

► 전기(電氣, electricity)

양, 음의 부호를 가진 두 종류의 전기적 성질을 가진 전하가 나타내는 여러 가지 자연현상을 말합니다.

고대 그리스 과학자 탈레스는 BC 600년경 호박(琥珀)을 모피에 문지르면 전하를 띠게 되어 가벼운 물체를 잡아당기는 것을 보고, 최초로 전기현상을 발견합니다. 호박을 의미하는 그리스어의 '엘렉트론'에서 '일렉트리시티(electricity)'라는 말이 유래된 것으로 전해집니다.

16세기 말 영국의 윌리엄 길버트는 자석에 대한 연구로 호박이 지니는 인력(전기력)과 자석의 인력(자기력)과의 차이를 처음으로 입증하였습니다. 1752년 미국의 벤저민 프랭클린은 연을 이용한 실험을 통해 번개의 전기적 성질을 증명하였습니다. 프랑스의 물리학자 뒤페는 전하에 양(陽)과 음(陰)의 구별이 있다는 사실을 발견하였고, 프랑스의 토목공학자 쿨롱은 전하를 띤 두 물체 사이에 작용하는 전기력에 관한 쿨롱의 법칙을 발견하였습니다. 이탈리아의 물리학자 볼타는 볼타전지라 불리는 화학전지를 발명하였고, 영국의 물리학자 톰슨은 전자(電子)의 존재를 발견하여 원자물리학의 발전에 공헌하였습니다.

► 전기장(電氣場, electric field)

전하로 인하여 전기력이 미치는 공간을 말합니다. 전기장의 세기는 전기장 내의 한 점에 단위 양전하(+1C)를 놓았을 때 그 전하가 받는 전기력의 크기로 정합니다. 전기장의 방향은 고전위인 양극에서 저전위인 음극으로 향하게 됩니다.

전기를 띤 전하나 시간에 따라 변하는 자기장 주위의 공간에는 전기장이 형성됩니다. 이 전기장 안에서 하전된 물체는 전기력을 받게 됩니다. 전기장은 패러데이(Michael Faraday)가 처음 소개한 물리량으로 전장 또는 전계라고도 합니다. 전기장은 보통 기호 $\vec{E}$로 표시하며, 크기와 방향을 갖는 벡터량입니다. 국제표준단위계의 단위로 [N/C,newton per coulomb], 혹은 [V/m,volt per meter]를 사용합니다.

정전기에서는 단위 전하에 작용하는 전기적인 힘을 전기장으로 정의합니다. 전기장의 방향은 양전하에서 나가서 음전하로 들어오는 방향이며 이것이 힘의 방향이기도 합니다. 전기장의 크기는 전하의 크기에 대한 전기력으로 정의합니다. 전기장은 힘과 전하량 사이의 비례상수가 됩니다. 식으로 표현하면

$$\vec{E} = \vec{F}/q$$

이며, 이것이 쿨롱의 법칙입니다. 쿨롱의 법칙은 정전기에서의 전기장만 설명할 수 있을 뿐, 전하의 움직임이 있을 경우는 로렌츠의 법칙으로 전기장을 설명할 수 있습니다. 여러 개의 전하가 분포되어 있을 경우에, 전기장은 전하들의 상대적인 위치와 크기에 따라서 결정되며, 각각의 전하에 의한 전기장의 벡터 합과 같습니다. 또한 전기장 내의 한 위치에서의 전기장의 크기는 전하로부터 거리의 제곱에 반비례합니다. 한편 움직이는 전하는 전기장과 함께 자기장도 만들어내는데, 자기장이 시간에 따라 변할 경우 전기장을 만듭니다. 이것을 이차전기장(secondary electric field)이라고 하며 패러데이의 유도법칙을 사용하여 계산할 수 있습니다. 일반적으로 전기장과 자기장은 완전히 분리되지 않기 때문에 전자기장이라고 합니다.

전기장 내에 탐색전하(test charge)가 있을 경우, 탐색전하는 공간의 각 점에서 전기장 방향으로 이동합니다. 이 방향을 이어가면 하나의 곡선을 얻을 수 있으며, 곡선상의 각 점에서의 접선은 그 점에서의 전기장의 방향을 나타냅니다. 전기장의 방향을 그린 전기력선과 전위가 같은 점을 연결하면 등전위면을 통한 전기장의 분포상황을 나타낼 수 있습니다.

► 자기(磁氣, magnetism)

자석이 가지는 물리적인 성질을 말합니다. 대표적인 예로 철조각이 막대자석에 달라붙는 현상을 들 수 있는데, 이것이 자기에 의한 현상을 보여줍니다. 전기력과 자기력이 확실하게 구분되기 시작한 것은 16세기 말이며, 19세기 초에 전류에 의한 자기현상을 발견하면서 자기와 전기가 밀접한 관련을 맺고 있다는 것이 밝혀졌으며, 그 후로 전자기학이 성립되었습니다.

자석을 뜻하는 영어인 magnet는 옛날에 자철석의 산지였던 소아시아 서부의 마그네시아(Magnesia)에서 유래하였습니다. 자극(磁極)은 1269년 프랑스의 P. 펠레그리누스가 발견하였으나, 전기력과 자기력의 차이가 명확히 구별된 것은 1600년경 영국엘리자베스 1세 여왕의 궁중 의사였던 영국의 길버트(William Gilbert)가 실험에 입각해서 쓴 저서《자석에 대하여》(1600)는 자기의 기본현상을 체계적으로 밝혔으며, 또한 지구자기에 의해 형성된 자기장을 지구자기장이라고 하고 지구 자체가 하나의 커다란 자석이라고 하였습니다. 이 때문에 길버트는 '자기학의 아버지'라고 불립니다. 그 후 1820년 덴마크의 외르스테드가 전류의 자기작용을 발견하였으며, 1831년 영국의 패러데이가 전자기유도(電磁氣誘導)를 발견함으로써 자기현상과 전기현상의 밀접한 관계가 밝혀진 후, 전기학과 자기학을 통합한 전자기학이 성립되었습니다.

► 자기장(磁氣場, magnetic field)

자석이나 전류 또는 시간에 따라 변화하는 전기장은 그 주위에 자기력이 작용하는 공간을 만듭니다. 이 공간을 자기장이라고 합니다. 자기장은 운동하는 전하에 영향을 미치며, 운동하는 전하는 자기장을 발생시킬 수 있습니다.

자기장의 방향은 자기장 내에 있는 나침반 자침의 N극이 받는 힘의 방향입니다. 자기장은 자기력선으로 표현할 수 있는데, 자기장 내의 나침반 자침의 N극이 가리키는 방향을 따라 이동하면 하나의 곡선이 그려집니다. 이 선을 자기력선이라고 하며, 자기력선의 방향은 N극에서 나와 S극을 향하고, 닫힌곡선이 됩니다. 자기력선은 도중에 끊어지거나 서로 엇갈리지 않으며, 자기력 선 위의 한 점에서의 접선의 방향이 그 점에서의 자기장의 방향입니다.

자기력선의 밀도는 자기장의 세기를 나타냅니다. 자기력선의 간격이 촘촘할수록 자기장의 세기가 크게 됩니다. 자석의 양쪽 자극에서 자기력선의 밀도가 높고, 자극으로부터 점차 멀어지면 자기력선의 밀도가 낮아집니다. 흰 종이 아래 자석을 놓고, 종이 위에 쇳가루를 뿌리면 자기력선을 간접적으로 볼 수 있습니다.

단위 면적을 지나는 자기력선의 수(자속, 자기선속)가 자속밀도 $\vec{B}$입니다. 자속밀도의 단위는 T(tesla, 테슬라)입니다. 자기선속은 Φ(파이)로 표시하며 그 단위는 웨버(Wb)입니다. 따라서 자기선속과 자기력은 다음의 관계에 있습니다.

$$\vec{B} = \vec{\Phi}/S, \qquad 1[T] = 1[Wb]/m^2$$

전류가 흐르는 도선 주위에는 항상 자기장이 형성됩니다. 이는 전류가 흐르는 도선 위에 나침반을 가져다 놓았을 때, 자침이 움직이는 것을 보고 알 수 있습니다. 이와 같이 전기장과 자기장은 상호작용하며, 이 원리는 발전기, 전동기 등에 널리 이용됩니다.

② 정전기장(靜電氣場, electrostatic field)

시간적으로 변하지 않는 고정된 전하분포에 의해 생기는 전기장의 형태를 말합니다.

► 전하(電荷, electric charge)

물체가 띠고 있는 정전기의 양으로 모든 전기현상의 근원이 되는 실체입니다. 양전하와 음전하가 있고 전하가 이동하는 것이 전류입니다. 정전기나 전류뿐만 아니라 모든 전기현상은 전하에 의해 발생합니다. 전하는 양전하와 음전하로 나눌 수 있습니다. 동일한 부호의 전하 사이에는 서로 밀어내는 척력이 작용하고, 다른 부호의 전하 사이에는 서로 잡아당기는 인력이 작용합니다. 이는 마치 자기력의 인력, 척력과 유사합니다.

전하의 양을 전하량이라 부릅니다. 단위는 [C,쿨롱]으로 도선에 1[A,암페어]의 전류가 흐를 때 1[sec,초] 동안 전선을 통과하는 전하량을 1[C,쿨롱]으로 정합니다.

► 전기력선속(電氣力線束, electric flux)

전기력선속(=전기선속=전속)은 전기장 내의 매질의 종류가 변해도 같은 선의 갯수로 연속하는 것처럼 생각된 가상선입니다. Q[C]의 전하에서 $Q/\varepsilon 0$ 개의 전기선속이 나와 －Q[C]의 전하로 진행하여 멈추게 됩니다. 한편, 전기선속의 단위면적당 밀도는 전기력선속 밀도라고 합니다.

패러데이나 맥스웰은 진공을 일종의 유전체로 취급하면서 전기장에 의해 분극(分極)하는 것으로 생각하였습니다. 이 분극을 전기변위라 했으나 현재는 진공에서의 분극은 고려되지 않고 있습니다.

► 전위(電位, electric potential)

전기장 내에서 단위전하가 갖는 위치에너지를 나타냅니다. 스칼라(scalar)량이며, 일반적으로 국제표준단위로 [V,볼트] 단위를 사용합니다. 편의상 지표면의 전위를 0V로 할 때가 많습니다. 특히, 전기장 내의 두 점 사이의 전위의 차이를 전위차 또는 전압이라고 합니다. 정전기장이나 정상전류가 흐르는 전기장 내의 기준점으로부터 어떤 점까지 단위전하를 옮기는 데 필요한 일의 양을 전위라고 합니다. 전기장 안의 전하는 전기장으로부터 전기적인 압력을 받게 됩니다. 이 때 전기적인 압력이 공간 내에서 불균일하다면 전하는 힘을 받아 가속 운동을 하게 됩니다. (+)전하 근처가 고전위이며, (-)전하 근처는 저전위입니다. (+)전하에서 (-)전하 방향으로 전기장이 형성되며, 양전하는 전기장의 방향으로 가속됩니다. 힘의 크기는 전하량에 전기장의 크기를 곱한 값으로 주어집니다.

중력장에서와 마찬가지로 전기장 내에서도 (+)전하를 전기장의 반대방향으로 이동시키려면 전기력을 거슬러 일을 해 주어야 합니다. 전하를 이동시킬 때 외부에서 전하에 해 준 일만큼 전하는 전기력에 의한 위치에너지를 가지게 됩니다. 따라서 수식으로 표현하자면, 전위 $V=W/q$ (W는 일, q는 전하량)가 됩니다. 전위는 q에 무관한 공간의 함수입니다. 전위는 시간에 무관한 전기장 내에서, 단위전하 당 위치에너지인 셈입니다. 시간에 의존하는 전기장에서의 전위와 구별하기 위해 정전기 전위라고도 합니다. 전위의 기준점은 임의적이며, 따라서 기준점을 달리하면 각 점의 전위값은 변하게 됩니다. 그래서 물리적으로 의미있는 양은 두 점 사이의 전위차가 됩니다. 사실 전위 V에 어떤 상수를 더해도 전기장에는 아무런 영향을 미치지 않으며, 이

것을 전기장의 게이지불변(gauge invariant)이라고 합니다. 단위전하(+1C)를 옮기는데 1J(줄)의 일이 필요할 때 두 점 사이의 전위차를 1V(볼트)라고 정의하고 전위차 또는 전압의 단위로 사용합니다. 수식으로 쓰자면, 1V=1J/C이 됩니다. 대전체에서 무한히 멀리 떨어진 점의 전위를 0이라 정할 때, 무한히 먼 곳에서 전위 V인 한 점으로 전하량 q를 갖는 점전하를 가져오는데 필요한 일은 W=qV입니다.

시간에 따라 변하는 전자기장에서는 전기장이 보존되지 않으며, 포텐셜함수(potential function)가 공간 내의 모든 점에서 정의될 수 없다는 차이가 있습니다. 또한 이러한 상황에서는 실제적인 전위강하(effective potential drop)를 함축하고 있으며 이러한 전위차를 기전력(emf)이라고 부릅니다. 전위는 회로의 모양이나 전자기장에 대한 자세한 지식없이 전기회로에 대한 분석을 할 수 있는 수단입니다. 또한 전위를 사용하면 전자기장이나 회로에 대해 맥스웰방정식을 계산하지 않고 키르히호프의 법칙을 사용하여 간단하게 전기회로를 해석할 수도 있습니다.

► 전기에너지(electric energy; electric potential energy)

전기에너지는 전자의 이동을 통해 일을 하거나 다른 에너지를 발생시킬 수 있는 에너지이며, 전하 주위에 전기장을 형성시킴으로써 발생됩니다. 단위는 에너지 일의 단위인 줄(J)이며, 암페어(A), 볼트(V), 초(s)로 표시하며 아래와 같이 정의됩니다.

$$[Joule] = [Volt][Ampere][\sec]$$

전위가 높은 곳에서 낮은 곳으로 양전하가 이동할 때 전기장이 일을 하게 되는데, 이 일을 전기에너지로 나타낼 수 있습니다. 다시 말해 전위차가 V인 두 점 사이에서 전하량 q가 이동할 때 전기장이 전하에 하는 일은 $W = qV$로 단위는 줄(J, joule)로 나타냅니다.

전력의 단위 $[watt] = [volt][ampere]$와 비교하면 전기에너지는 전력으로 일정한 시간동안 일을 한 양이 됩니다. 예를 들어 30와트(W)전구를 1시간동안 사용했다면 사용한 전기에너지는 30×3600 = 108 (kJ)이 됩니다.

전기에너지가 일한 결과는 여러 형태로 나올 수 있는데 전열기를 사용한 경우처럼 열에너지로 변환되거나, 모터를 돌리는 경우는 일로, 전구를 사용한 경우는 빛으로 에너지가 전환됩니다.

► 정전기유도(靜電氣誘導, electrostatic induction)

도체나 유전체에 대전체를 가까이 가져갈 때, 전기장의 영향으로 물체의 표면에 전하가 유도되는 현상을 정전유도라고 합니다. 대전체와 가까운 쪽에는 대전체와 다른 종류의 전하가, 반대쪽에는 같은 종류의 전하가 나타납니다. 이 현상을 이용하여 대전상태를 알아내는 검전기를 만들거나, 전기를 저장하는 라이덴병을 만듭니다. 접지하거나 대전체에 닿지 않으면, 물체는 전체적으로 원래의 전기적 중성상태를 유지합니다. 이는 전하량은 보존되면서 전하의 분포만 바뀐 것이기 때문입니다. 따라서 도체의 양쪽으로 유도된 양전하와 음전하의 크기는 같습니다.

빗으로 머리를 빗은 다음 작은 종이조각에 가까이 가져가면 종이조각이 빗에 달라붙습니다. 종이 같은 부도체에는 자유전자가 없으나 대전체를 가까이 가져가면 극성을 지닌 분자들의 배열이 변합니다. 이런 성질이 있는 물체를 유전체라고 합니다. 이때 유전체 내부는 양전하와 음전하의 양이 같으므로 아무런 변화가 없습니다. 하지만 양끝에서는 분자들이 한쪽 방향으로 배열되어 전하가 유도됩니다.

► 모멘트(moment ≈순간)

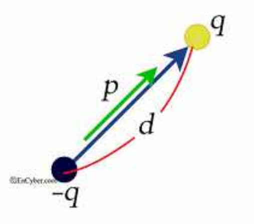
어떤 종류의 물리적 효과가 하나의 물리량뿐만 아니라 그 물리량의 분포상태에 따라서 정해질 때에 정의되는 양입니다. 그 예로, 회전운동에서의 관성모멘트는 물체의 질량이 같더라도 그 분포도에 따라 다른 값을 갖게 되는 것을 들 수 있습니다.

물체의 회전운동의 관성은 그 물체의 관성질량뿐만 아니라 회전축에 대한 물체 각부의 질량의 분포상태로 결정되므로, 그 비율을 나타내기 위하여 관성모멘트라는 특별한 양을 정의합니다. 또 물체에 작용하는 힘의 회전효과는 힘만이 아니라 회전축과 힘의 작용점과의 거리에도 의존하게 되므로 물체의 회전운동을 논할 때는 흔히 합력의 모멘트라는 물리량을 사용합니다. 이것은 회전축에서 힘의 작용점에 그은 반지름 벡터 $\vec{r}$과 힘의 벡터 $\vec{F}$의 외적(外積)으로 정의되는 벡터량이며 힘 $\vec{F}$대신 운동량 벡터를 취한 것을 운동량의 모멘트 또는 각운동량이라고 합니다.

► 전기쌍극자(electric dipole)

대부분의 물질은 (-)전하를 띤 전자와 (+)를 띤 핵이 평형을 이루고 전기적으로 중성을 이루고 있습니다. 그러나 총 (-)전하와 총 (+)전하의 위치가 일치하지 않을 경우나, (-)전하를 띤 물질과 (+)전하를 띤 물질이 일정한 거리를 두고 떨어져 있는 상태를 전기쌍극자라고 하고, 그 크기는 보통 전기쌍극자모멘트(electric dipole moment)로 나타냅니다.

전기쌍극자는 보통 같은 크기이지만 극성이 다른 전하 q가 d만큼의 거리를 사이에 두고 있는 형태입니다. 이 전기쌍극자의 크기(p)를 나타내는 전기쌍극자모멘트는 다음과 같이 전하량에 거리를 곱한 양이며 (-)전하에서 (+)전하 방향으로 전기쌍극자의 방향을 정합니다.



$$p = qd$$

이 전기쌍극자는 주변에 전하를 띤 물질에 전기력을 작용하게 되는데 그 힘은 전기쌍극자모멘트와 물질의 전하량을 곱한 양에 비례하고 거리의 삼승에 반비례합니다. 따라서 두 전하 사이에 작용하는 전기력이 거리 제곱에 반비례하는 것과 비교하면 전기쌍극자와 전하 사이에 작용하는 힘은 전기쌍극자에서 떨어질수록 힘이 급격히 줄어드는 것을 알 수 있습니다. 또 외부

에서 균일한 전기장을 걸어주면 전기쌍극자는 전체적으로 중성이므로 전기장에서 전기쌍극자 중심이 움직이지는 않지만 (즉 알짜힘을 받지는 않지만) 전기쌍극자모멘트의 방향이 전기장방향과 같은 방향으로 정렬하려는 회전하는 힘을 받게 됩니다. 전기쌍극자에 불균일한 전기장을 걸어주면 회전력뿐 아니라 전체가 움직이는 알짜 힘도 받게 됩니다. 수도에서 흐르는 물에 (-)로 대전된 플라스틱 막대를 가져가면 물의 흐름이 휘는 것을 볼 수 있습니다. 물처럼 전기쌍극자 성질을 지속적으로 가지는 물질을 영구쌍극자라 합니다.

► 유전율(誘電率, permittivity)

　외부 전기장을 유전체에 가하면 유전분극 현상이 일어나 가해진 외부 전기장에 반대방향으로 분극에 의한 전기장이 발생합니다. 결과적으로 유전체 내부에서의 전기장 세기가 작아지게 됩니다. 이때 작아진 비율이 유전율입니다. 유전율 ϵ은 전기변위장(electric displacement field) $\vec{D}$와 전기장 $\vec{E}$로 다음과 같은 관계를 가집니다.

$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}$$

　전기변위장은 전기장을 만드는 전하량에만 관계하는 양입니다. 따라서 일정한 전하량이 있을 경우 유전율이 높을수록 전기장은 작아집니다. 이는 유전체내에서 유전분극이 증가함을 의미하기도 합니다. 단위당 유전분극 $\vec{P}$는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\vec{P}=\epsilon_0\chi\vec{E}$$

이 식에서 나타난 전기감수율 χ(chi,카이)와 유전율 ϵ(엡실론)의 관계는 다음과 같습니다.

$$\epsilon=\epsilon_0(\chi+1)$$

즉, 전기감수율이 높을수록 유전분극이 증가하고, 유전율도 증가하며, 전기장은 작아집니다. 진공에서 유전율을 특별히 ϵ_0로 표시하며 다음과 같이 정의됩니다.

$$\epsilon_0=\frac{1}{c^2\mu_0}=8.85418\times10^{-12}\,[F/m]$$

여기서 c는 빛의 속도이고, μ_0(뮤 제로)는 진공의 투자율입니다. [Farad,패러드]는 축전용량을 나타내고 [meter,길이]는 길이의 단위입니다. 한편 진공의 유전율에 대한 비율을 유전상수(dielectric constant) ϵ_r라 하고 다음과 같이 정의합니다.

$$\epsilon=\epsilon_r\epsilon_0$$

공기의 유전상수는 1.0005, 종이는 3, 고무는 7, 메탄올은 30, 물은 80입니다.

► 유전분극(誘電分極, dielectric polarization)

전기장을 가했을 때 전기적으로 극성을 띤 분자들이 전체적으로 정렬하여 물체가 전기를 띠는 현상을 유전분극이라 합니다. 전기장 내에 물체를 놓으면 도체인 경우는 자유전자들이 물체 내에서 움직여 정전기 유도현상이 나타납니다. 하지만 전기적으로 극성을 띠는 분자로 이루어진 유전체는 전기장을 가하면 극성 분자들이 전기장과 반대방향으로 정렬하여 표면에 전기를 띠게 됩니다. 물질마다 분극 되는 정도는 가해진 전기장의 세기 E에 비례하며, 그 비례상수를 전기감수율(electric susceptibility) χ_e라 하며, 단위면적당 분극 P는 다음과 같습니다.

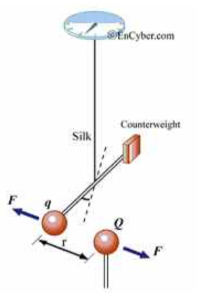
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

여기서 ε_0는 진공에서의 유전율입니다. 유전체의 분극은 두 가지 경우로 나눌 수 있습니다. 첫째는 영구쌍극자가 정렬하는 경우입니다. 분자와 같이 작은 범위에서 (+)전기를 띤 부분과 (-)전기를 갖는 부분으로 나뉘어져 있는 것을 전기쌍극자라고 합니다. 보통의 경우 영구쌍극자의 방향은 열에너지에 의해 일정치 않아 물체는 전기를 띠지 않습니다. 하지만 외부 전기장이 강할수록 영구쌍극자가 정렬하여 전기를 띠게 됩니다. 두 번째는 유도쌍극자의 경우입니다. 외부 전기장을 주면 극성이 없던 분자가 전기력에 의해 전자가 이동하여 전기를 띠어 쌍극자가 됩니다. 그리고 유도쌍극자의 방향이 전기장을 따라 정렬되어 있어 전기를 띠게 됩니다. 분극에 의한 전기장의 방향은 외부 전기장 방향과 반대 방향이므로 유전체 내에서 전기장 세기는 외부전기장의 세기보다 작아지게 됩니다.

► 쿨롱의 법칙(—法則, Coulomb's law)

전하를 가진 두 물체 사이에 작용하는 힘의 크기는 두 전하의 곱에 비례하고 거리의 제곱에 반비례합니다. 같은 극성의 전하는 서로 미는 척력을 다른 극성의 전하는 서로 잡아당기는 인력이 작용합니다. 이 법칙은 1785년 프랑스의 물리학자인 C.A.쿨롱이 비틀림 저울을 사용한 실험에서 발견되었습니다.

쿨롱의 법칙은 만유인력과 같이 거리제곱에 반비례하는 힘이지만, 전하의 극성에 따라 인력 혹은 척력이 작용하게 됩니다. 쿨롱의 법칙에 의한 두 전하 q1, q2 사이에 작용하는 전기력(F)은 다음과 같습니다.



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

여기서 힘 $\vec{F}$의 단위는 뉴튼(N), 거리 r은 미터(m), 전하 q1, q2는 쿨롱(C)입니다. ϵ_0는 진공에서 유전율을 의미하며, π는 원주율을 의미합니다. 비례상수 값은 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 [Nm^2C^{-2}]$$

전하 q가 있을 때 거리 r에서 전기장(E)은 단위전하 즉 1C의 전하가 놓였을 때 힘으로 다음과 같이 정의됩니다. 이때 전기장의 방향은 전하 q가 (+)일 경우 전하 q에서 거리 r로 화살표를 그렸을 때 방향이고, (-)일 경우는 반대로 향하는 방향입니다.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

전기장의 단위는 [N/C]입니다.

► 가우스의 법칙(—法則, Gauss's law)

물리학의 기본적인 법칙 중의 하나로서 역제곱법칙(inverse square law)이 적용되는 법칙입니다. 전하나 질량과 같은 근원물질(source)의 주위에 가우스 곡면(폐곡면)을 가정할 때, 폐곡면 바깥으로 흘러나오는 유량은 폐곡면 내부에 있는 근원물질의 전체량에 비례한다는 법칙입니다. 주로 전기장을 둘러싼 폐곡면에 대해 수직으로 통과하는 전기장의 흐름, 즉 전기력선속은 전체 전하량에 비례한다는 전자기 법칙으로 잘 알려져 있습니다. 이것은 가우스의 정리(Gauss's theorem)가 정전기장에 응용된 예로, 일반적으로는 중력이나 전자기력과 같이 역제곱 법칙이 성립하는 모든 힘에 응용할 수 있습니다. 가우스(Carl Friedrich Gauss)가 1835년 발견한 법칙으로 근원물질이 대칭성을 갖는 경우 큰 위력을 발휘하는 법칙입니다.

정전기장에서 다수의 점전하 또는 전하분포가 만드는 전기장을 쿨롱의 법칙과 중첩의 원리를 이용해 직접 계산할 수도 있지만, 가우스의 법칙을 사용하면 보다 간단하게 구할 수 있습니다. 주어진 전하분포의 바깥에 부피 V인 폐곡면을 가정하면, 폐곡면의 표면 S를 통과하는 총 전기력선속 Φ_E은 그 폐곡면 속에 포함된 총 전하량과 같습니다.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

여기서 E는 전기장, ε_0는 진공의 유전율, ρ은 전하밀도, Q은 전체 전하량입니다. 무한 도선 주위에 원통형의 가우스 폐곡면을 가정하면 도선 주위의 전기장을 쉽게 구할 수 있으며, 전하가 분포된 구는 구의 내부와 외부에 각각 가우스 표면을 가정하여 구할 수 있습니다.

③ 정자기장(靜磁氣場, magnetostatic field)

전하가 일정한 속도로 움직이면 전류가 발생합니다. 이러한 전류가 일정한 상태를 유지하는

것을 직류라고 합니다. 이러한 전류에 의하여 발생하는 정상 상태(Stationary state)의 자기장을 정자기장이라고 합니다.

► 전류(電流, electric current)

전위(電位)가 높은 곳에서 낮은 곳으로 전하(電荷)가 연속적으로 이동하는 현상입니다. 물이 높은 곳에서 낮은 곳으로 흐르듯이 전하는 전기적인 위치에너지가 높은 곳에서 낮은 곳으로 이동합니다. 물이 흐르는 이유가 중력 때문이라면 전류는 기전력(起電力)이라는 힘에 의해 흐르게 됩니다. 전류가 흐르는 길을 전기회로라 하며, 이는 물이 흐르는 수로(水路)에 대응됩니다.

전류의 크기를 나타내는 단위는 A(암페어)입니다. 1A는 도선의 임의의 단면적을 1초 동안 1C(쿨롬)의 전하가 통과할 때의 크기입니다. 전류의 방향은 정전하(정지한 전하, 양전하)의 이동방향을 양(+)의 방향으로 정합니다. 그러나 실제로 도선 안에서는 전류의 반대방향으로 자유전자가 이동합니다. 1A의 전류가 흐르는 도선에는 1초에 약 6.25×10^{18}개의 자유전자가 단면적을 통과합니다. 전류의 종류에는 그 크기 및 방향이 변하지 않는 직류(直流)와 크기와 방향이 주기적으로 변하는 교류(交流)가 있습니다.

도선에 전류가 흐르면 도선 주위에 자기장이 형성됩니다. 이 원리를 사용해 전자석, 전류계, 전동기나 자기부상고속철도처럼 전기에너지를 역학적 에너지로 바꿀 수 있습니다.

변위전류라는 용어는 맥스웰이 전자기현상을 통일시키기 위해 제안한 것으로, 자유공간 내의 전기력선속밀도가 시간적으로 변하면, 전도전류가 자기장을 발생시키는 것처럼 자기장이 발생한다고 하고 이를 변위전류라 하였습니다.

► 자속(磁束, magnetic flux)

어떤 표면을 통과하는 자기력선의 수에 비례하는 양. 크기와 방향이 균일한 자기장 $\vec{B}$가 있습니다. 자기력선이 자기장과 수직이고 면적이 A인 평면을 통과할 때 단위면적을 지나는 자기력선의 수는 자기장의 크기 $\vec{B}$에 비례합니다. 따라서 면적 A인 표면을 통과하는 선의 수는 B*A에 비례합니다. 이때 자기장의 세기 $\vec{B}$와 자기장에 수직인 면적 A의 곱 B*A를 이 표면적을 지나는 자속이라고 합니다. 만약 평면의 법선과 자기장이 이루는 각이 θ일 때, 자속은 다음과 같습니다.

$$\Phi = |\vec{B}||\vec{A}|cos\theta$$

따라서 자기장과 면이 서로 수직일 때 자속은 B*A로 가장 큰 값을 가지며, 자기장과 표면적이 서로 평행일 때 0으로 가장 작은 값을 가집니다.

일반적인 모양의 구부러진 표면을 지나는 자속을 구하려면 그 면을 잘게 나누어서 각각의 조그만 면이 평면에 가까워지도록 만든 다음, 조그만 면을 지나는 자속을 전부 더하여 전체 자속을 구합니다. 자속의 단위는 웨버(Wb) = 1T·㎡이며, 이때 T(테슬라)는 자기장의 단위입니다.

► 자기력선속밀도(磁氣力線束密度, magnetic flux density)

단위 면적을 수직으로 지나는 자기력선의 수를 줄여서 자속밀도라고도 하며 자기장의 크기를 나타내는데 사용합니다. 단위는 가우스(G) 또는 테슬라(T)를 사용합니다.

자기장에 수직인 단면을 지나는 자기력선의 총 수를 자기선속(자속, magnetic flux)라고 하며 보통 Φ(파이)로 표시합니다. 단위는 자극의 자기량 단위인 Wb(웨버)를 사용합니다. 단위면적을 지나는 자기선속을 자기력선속밀도(자속밀도)라고 하며 단위는 가우스(G) 또는 테슬라(T)를 사용합니다.

자기선속밀도는 자기장의 세기를 나타내며, 넓이 S인 단면을 수직으로 지나는 자기선속 Φ와 자기장 B의 세기는 다음의 관계에 있습니다.

$$\vec{B} = \frac{\vec{\Phi}}{S}$$

$$1[Tesla] = 1[Wb/m^2]$$

자기력선의 간격이 촘촘할수록 자기장의 세기가 세어집니다. 자석의 경우, 양쪽 자극에서 자기력선의 밀도가 높고 자극으로부터 점차 멀어지면 자기력선의 밀도가 낮아집니다. 흰 종이 아래 자석을 놓고, 종이 위에 쇳가루를 뿌리면 이를 확인할 수 있습니다.

► 자화(磁化, magnetization)

물체가 자성을 지니는 현상입니다. 모든 물체는 자기장 내에 두면 크건 작건 자화되는데, 자화되는 양상에 따라 강자성체(强磁性體)·상자성체·반자성체·페리자성체 등으로 구분됩니다. 이 중에서 상자성체와 반자성체는 자화되는 정도가 약하고 자기장을 제거하면 자성이 없어지지만, 강자성체는 자화되는 정도가 강하고, 또 자기장을 제거해도 자성이 남아 있는 경우가 많습니다. 자화율은 물질이 자화되는 세기와 외부 자기장의 자화력의 비율로 상자성체나 반자성체는 물질의 고유상수이나, 강자성체는 자화과정과 자기장의 세기에 따라 자화율이 변합니다.

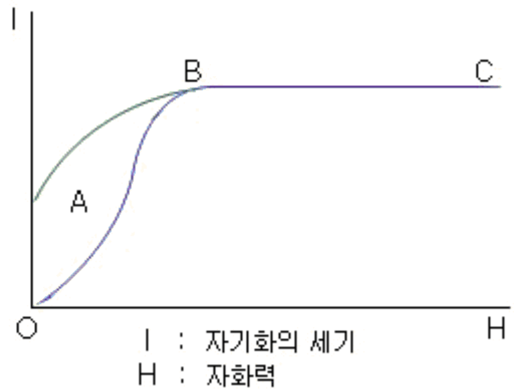
자화의 세기는 일반적으로 물체의 단위부피에 대한 자기모멘트에 의해서 측정됩니다. 예를 들면, 길다란 막대의 길이를 L, 자극(磁極)의 세기를 m(따라서 자기모멘트는 mL), 자화되는 방향에 수직인 단면적을 s라고 하면, 자화의 세기 I는 다음 식으로 구할 수 있습니다.

$$I = mL/sL = m/s$$

자화의 세기는 단면적에 나타나는 자하(磁荷:자극의 세기)의 표면밀도를 나타내는 것이라고

도 할 수 있습니다. 이 밖에 자화에 관한 양으로는 자화율이 있는데 이것은 자화의 세기와 그 때의 외부 자기장(=자화력)사이의 비이며, 상자성체나 반자성체에서는 자기장의 세기와 관계가 없는 물질 고유의 상수이지만, 강자성체에서는 자기장의 세기와 자화과정에 따라 그 값이 복잡하게 변합니다.

전혀 자성을 가지지 않은, 즉, 자기소거상태(소자상태)인 철에 외부자기장(자화력)을 가하고 이것을 차차 세게 하면, 자화는 일반적으로 아래 그림과 같이 진행합니다. 즉, 처음(O → A)에는 자기장의 세기와 거의 비례하여 자화가 진행되므로 일정한 자화율(초기자화율이라고 한다)을 가지지만, 자기장의 세기가 어느 정도에 이르면 자화가 급격히 증가하고(A → B), 자기장을 더 강화하여 일정한 한계를 넘게 되면 그 이상은 자화가 진행되지 않는 자기포화상태(B → C)에 이르게 됩니다.



이와 같은 곡선을 일반적으로 자기이력곡선이라고 합니다. 초기자화율을 보이는 O→A의 범위에서는 반대로 자기장을 점점 약화시키면 자화는 A→O의 선을 따라 감쇠하며 그 변화는 가역적(可逆的)이지만, 일단 A점을 넘으면 자기장을 약화시켜도 자화상태의 변화는 C→B→A→O와 다른 경과를 밟으며, 자기장이 O이 되어도 자성이 남습니다. 이것을 잔류자화(殘留磁化)라고 합니다. 이와 같이 강자성체의 자화가 자기장의 세기와 1대 1의 관계에 있지 않고, 그 이전의 자화상태에 관련되는 일을 자기이력(磁氣履歷)이라고 합니다.

철 등 강자성체의 자화가 이상과 같은 과정을 밟는 것은, 이들이 자기적인 미소영역(微小領域)의 구성체라는 데서 설명이 가능합니다. 즉, 강자성체의 내부에는 자화력이 작용하지 않는 경우에도 어느 정도 자화되어 있는(이것을 자발자화라고 한다) 자기구역이라는 영역이 있으며, 자기소거상태에서는 각 자기구역의 자화 방향이 제각기이기 때문에 자성이 밖으로 나타나지 않으나, 자화력이 가해지면 자기구역이 회전하여 차차 자화력의 방향에 접근해서 자성이 나타나게 됩니다. 이 단계가 초기자화율을 가지는 O→A의 범위입니다. 그러나 자기구역은 자신이 회전함과 동시에 어떤 자기구역의 자화 방향이 인접하는 자기구역보다 자화 방향에 가까울 때는, 자화력의 방향을 향하지 않은 부자연한 부분을 줄이기 위해 자기구역벽(磁氣區域壁)을 이동시켜서 보다 큰 자기구역을 형성하는 성질이 있습니다. 따라서 자화력이 어느 정도를 넘으면 이 자기구역벽이동이 갑자기 격렬해지므로 외부에는 자화의 급격한 강화로 나타납니다. 자화력이 한층 더 강화되면 마침내 물질 전체가 하나의 자기구역으로 되어 그 이상 자화력을 강

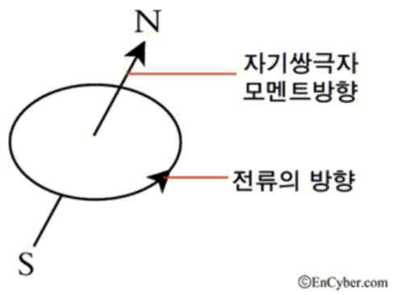
화해도 자화가 진행되지 않는 자기포화상태가 되는 것으로 생각됩니다.

► 자기쌍극자(magnetic dipole)

자석과 같이 한쪽은 N극 반대쪽은 S극을 갖는 물질을 자기쌍극자라고 합니다. 전기력에서 전기력을 일으키는 단위는 (-)전하와 (+)전하입니다. 물질은 전기적으로 (-)극을 갖거나 (+)극을 갖는 물질로 나눌 수 있고, 이 둘 사이에 작용하는 전기력 현상을 볼 수 있습니다. 하지만 자기력을 갖는 물질은 N극과 S극으로 양분될 수 없고, 항상 한쪽은 N극 다른 쪽은 S극을 띤 자기쌍극자 형태로 나타나게 됩니다. 전자석을 살펴보면 원형으로 굽어진 전선에 전기를 흘려 자석의 성질을 띠게 되어 자기쌍극자를 이루게 됩니다. 영구자석의 경우는 전자가 전자석의 역할을 합니다. 전자는 (-)전하를 띠고 있는데 스스로 회전하는 효과를 갖고 있습니다. 이 회전하는 효과에는 두 가지가 있습니다. 하나는 자기 자신을 축으로 회전하는 스핀이라는 효과가 있고, 다른 하나는 핵을 중심으로 주위 공간을 회전하는 효과입니다. 이 회전하는 효과에 의해 전류가 흐르는 효과가 발생합니다. 이 전류가 흐르는 효과에 의해 전자석에서처럼 자기력을 띠게 되어 자기쌍극자가 됩니다. 보통의 물질은 이런 자기쌍극자가 불규칙하게 배열되어 전체적으로 자기력이 없지만, 영구자석의 경우 이런 자기쌍극자들이 한쪽으로 정렬되어 전체적으로 자기력을 잃지 않아 자석이 됩니다.

► 자기쌍극자모멘트(magnetic dipole moment)

자기쌍극자의 크기는 자기쌍극자모멘트로 나타납니다. 예를 들어, 원형으로 만든 전선에 전류 I가 흐를 때, 이 원형 전선의 넓이를 S라 하면, 자기쌍극자모멘트의 크기는 전류와 넓이를 곱한 값 IS가 되고, 자기쌍극자모멘트의 방향은 전류의 방향으로 오른손 검지를 감쌀 때 엄지손가락이 가리키는 방향이 됩니다.



► 투자율(透磁率, magnetic permeability)

물질의 자기적(磁氣的) 성질을 나타내는 양. 자기유도용량·자기투과율이라고도 합니다. 자기장의 영향을 받아 자화할 때에 생기는 자기력선속밀도(磁氣力線束密度)와 자기장의 진공 중에서의 세기의 비를 말합니다. 보통의 물질, 즉 상자성체(常磁性體), 반자성체에서는 거의 1에 가깝고, 그 값도 물질의 종류에 따라 정해지는데, 철 등의 강자성체나 페리자성체 등에서는 극히 큰 값을 나타내며, 그 값은 자성체의 자기적인 이력(履歷)이나 자기장의 세기에 따라 변합니다. 진공에서 투자율은 다음과 같은 관계식으로 주어집니다.

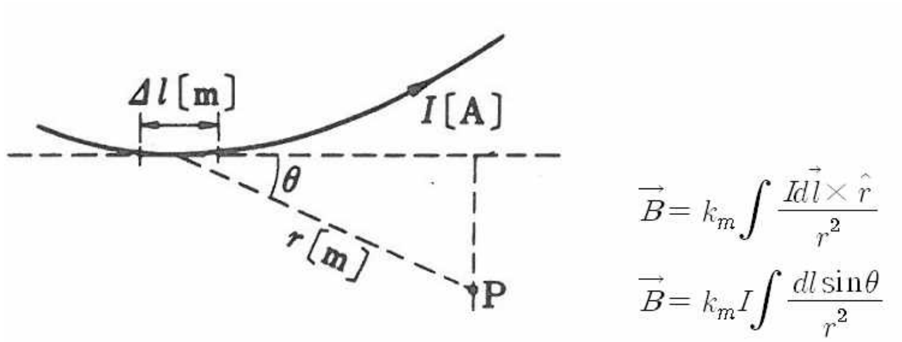
$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$$

자유공간에서의 투자율 μ_0는 $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$이고, 단위는 $[Weber/A.m]\,[=H/m]$입니다.

► 비오-사바르의 법칙(一法則, Biot-Savart's Law)

정상전류가 흐르고 있는 도선 주위의 자기장의 세기를 구하는 법칙입니다. 이 법칙을 이용하면 도선 밖의 한 점에서의 자기장의 세기는 회로 안의 작은 면적의 자기장의 벡터합으로 구할 수 있습니다.

원형전류와 자기장에 관한 암페어의 법칙이 발견된 시점을 전후해서 1820년 장-밥티스트 비오(Jean-Baptiste Biot)와 펠릭스 사바르(Félix Savart)가 발견하였습니다. 이 발견을 계기로 전자기(電磁氣) 현상의 통일적인 이론을 얻는 것이 물리학의 중요한 과제가 되었습니다. 비오-사바르 법칙은 전류밀도와 주변 자기장의 관계를 나타내주는 법칙으로 임의의 점 P 에서의 자기장의 세기는 다음과 같이 주어집니다.



여기서 $k_m = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$가 되며, $\hat{r} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{|r|}$로서, $\overrightarrow{r}$방향으로의 단위벡터가 됩니다.

► 앙페르의 회로법칙(Ampère's circuital law)

자기장에 대한 가우스 법칙에 해당하며, 프랑스의 물리학자 앙드레마리 앙페르가 발견하였습니다. 앙페르의 회로법칙은 전류밀도 $\overrightarrow{J}$와 그것이 만들어내는 자기장 $\overrightarrow{H}$에 관련된 법칙으로 다음과 같습니다.

$$\oint_C \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{a}$$

여기서,

$\overrightarrow{H}$는 자기장의 [암페어/미터]

$d\vec{l}$ 곡선 C의 미소 미분요소

$\vec{J}$ 곡면 C의 표면 S를 통과하는 전류밀도 (암페어/미터^2)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 자유공간에서의 투자율 (테슬라/헨리)

$\oint_C$ 폐곡면 C의 적분

입니다. 마찬가지로 이 방정식의 미분형은 다음과 같이 주어집니다.

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \vec{J}$$

자기장 $\overrightarrow{H}$는 자속밀도 $\overrightarrow{B}$(단위: 테슬라(T))와 다음과 같은 관계가 있습니다.(진공인 경우)

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$$

앙페르 법칙을 적용할 때의 모순을 발견한 제임스 클러크 맥스웰은 이 법칙이 불완전하다고 결론을 내립니다. 이 문제를 해결하기 위해 그는 변위전류의 개념을 고안하였으며 이를 통해 맥스웰 방정식에 편입된 일반화된 앙페르의 회로법칙을 만들었습니다. 맥스웰에 의해 교정된 앙페르의 회로법칙의 적분형은 다음과 같습니다.

$$\oint_C \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\overrightarrow{A} + \frac{d}{dt} \int_S \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{A}$$

변위전류밀도 $\overrightarrow{D}$는 다음과 같습니다. (단위: 쿨롱/미터^2)(진공인 경우)

$$\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E}$$

이 앙페르-맥스웰 법칙은 다음과 같은 미분형으로도 표현됩니다.

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \vec{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

두 번째 항이 변위전류에서 나온 것을 알 수 있습니다. 변위전류의 개념을 통해 맥스웰은 빛이 전자기파의 일종임을 (정확히) 가정할 수 있었습니다

► Gauss's law for magnetism(자기 가우스 법칙)

자성에 대한 가우스 법칙(Gauss's law)은 닫혀진 곡면에 대해서 그 곡면을 지나는 자기력선의 수(자기장)와 곡면으로 둘러싸인 공간 안의 자기원천의 관계를 나타내는 물리법칙입니다. 가우스 법칙을 적분형태로 쓰면 다음과 같습니다.

$$\Phi = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

여기서 $\vec{B}$는 자기장 벡터, $d\vec{A}$는 표면 A 위의 미소 면적을 나타내는 벡터로 그 지점의 접평면에서 바깥쪽을 향하는 법선벡터를 뜻하고 $\oint_A$는 표면 A전체에 대한 면적분을 뜻합니다.

자성에 대한 가우스 법칙의 미분형은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

여기서 $\nabla \cdot$는 발산(divergence), $\vec{B}$는 자기장벡터입니다. 즉, 이 법칙은 자석의 N극과 S극이 같이 있어야 하며 고립된 자극이 없음을 나타내는 법칙입니다.

④ 전기역학 [電氣力學, electrodynamics]

전자기 현상을 역학의 형식을 이용하여 해석하는 학문입니다. 전자기학과 같은 내용이며, 이름의 차이만 있을 뿐입니다. 현재는 전자기장이 양자화된 것을 논의하고 있어서 이 학문을 양자전기역학이라 부릅니다.

H.C.외르스테드에 의한 전류의 자기작용의 발견에 이어 A.M.앙페르는 전류 상호간에 미치는 역학적 원격작용(遠隔作用)의 정식화(定式化)에 성공하여 이 상호작용을 다루는 학문을 전기역학이라 하였습니다. 앙페르의 전기역학을 발전시킨 W.베버의 전자론(電子論)에서는 하전입자(荷電粒子:電子)의 움직임에 대하여 전자기론을 빌려 종래의 전기역학과 정전기론과의 통합이 시도되었습니다. 전자론(電子論)에 의해 전기역학이 새로운 내용을 첨가하게 되었습니다. 이어서 베버의 전기역학과 맥스웰의 전자기장론과의 종합이라고도 생각할 수 있는 로렌츠의 고전전자론(古典電子論)이 등장합니다. 여기서 맥스웰방정식에 나타나는 하전과 전류는 본질적으로 하전입자의 움직임에 연관성이 부여됨으로써 그 현상론적(現象論的) 성격이 해소됩니다. 결국 전자기론은 하전입자의 역학적 운동과 관련됨으로써 '운동체의 전기역학'이라는 성격을 가지게 되었습니다. 전자기론 또는 전자기학은 전기역학에 귀착되었고, 전자기학과 전기역학과의 차이는 단지 명칭상의 차이에 지나지 않으며 내용에서는 차이가 없습니다.

► 유도기전력 [誘導起電力, induced electromotive force]

전자기유도현상에 의해 생기는 기전력을 말합니다. 시간에 따라 변하는 자기장 내부의 도체 혹은 자기장 내에서 움직이는 도체에서 발생하는 기전력으로 전압의 단위를 가집니다.

1820년, 덴마크의 물리학자 외르스테드(Hans Christian Oersted, 1777-1851)는 전도전류가 자침을 움직이게 하는 현상을 발견하였습니다.. 영국의 물리학자 패러데이(Michael Faraday, 1791-1867)는 여기서 더 나아가 자기장의 변화가 전류를 유도한다는 사실을 알아내었습니다. 이렇게 전류와 자기장이 서로 영향을 주고받는 것을 전자기유도현상이라고 합니다. 폐회로(閉回路:예컨대 코일 등) 가까이에서 자석을 움직이거나 전류가 흐르는 다른 회로를 이용해 자기

장을 변화시키면 폐회로에 전류가 통하게 되는데 이 때 전류를 생성하는 힘을 유도기전력이라고 합니다. 유도기전력은 자기력선속에 대해 아래와 같은 식으로 표현됩니다.

$$emf = -\frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial t}$$

이 때, 기전력은 자기력선속의 시간에 대한 변화량에 비례하는 크기를 갖고 음의 부호를 가집니다. 이것은 유도기전력에 의한 유도전류가 자기력선속의 변화를 상쇄하는 방향으로 흐르는 것을 의미하며 이를 렌츠의 법칙이라고 부릅니다.

► 변위전류 [變位電流, displacement current]

전기력선속의 시간에 대한 변화량으로 나타내며 전속전류라고도 합니다. 일반적으로 알고 있는 전도전류에 대응하는 개념으로 실제로는 흐르지 않지만 마치 전류가 흐르는 것처럼 생각할 수 있는 경우에 사용합니다.

덴마크의 물리학자 외르스테드(Hans Christian Oersted, 1777-1851)는 1820년, 전도전류가 자침을 움직이게 하는 현상을 발견하였습니다. 영국의 물리학자 패러데이(Michael Faraday, 1791-1867)는 여기서 더 나아가 자기장의 변화가 전류를 유도한다는 사실을 알아내었습니다. 이를 정리한 것이 패러데이의 법칙으로 자기장의 시간에 대한 변화량이 전기장과 갖는 관계에 관한 식으로 나타낼 수 있습니다.

이에 대응하는 개념으로 앙페르(Andre Marie Ampere, 1775-1836)의 법칙을 들 수 있는데, 이는 전류와 자기장 사이의 관계에 관한 식으로 정리할 수 있습니다. 여기서 맥스웰(James Clerk Maxwell, 1831-1879)은 수학적인 기교로 앙페르의 법칙에 전기장의 시간에 대한 변화량 항을 첨가함으로써 전기장과 자기장 모두에 대해 대칭적인 수식을 완성하였습니다.

패러데이의 법칙 $$\oint \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \overrightarrow{\Phi}_B}{\partial t}$$

맥스웰 수정 앙페르의 법칙 $$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t})$$

이 관계식에서 보이는 새로운 항이 의미하는 것이 변위전류입니다. 앙페르의 법칙에서는 전류로 정의되던 부분이 맥스웰의 수식에서는 전류와 전기장의 변화량 항의 합으로 나타나고 있습니다. 이것은 전기장의 변화량이, 실제로 전류가 흐르는 것은 아니지만, 마치 전류가 흐르는 것과 같은 결과를 보일 것임을 암시합니다. 이러한 변위전류의 개념이 도입됨으로써 자기장과 전기장의 상호연관이 완전히 규명되고 전기장과 자기장 성분을 동시에 가지는 전자기파의 존재가 입증되었습니다. 축전지와 같이 실제로는 끊어진 회로에서 변위전류를 관찰할 수 있습니다. 축전지를 회로에 연결하여 전류를 흐르게 하면 축전지의 전극면에 전하가 모이면서 전극 사이의 전기장이 변화하게 됩니다. 이 때 전극 사이에 실제의 전류가 흐르지는 않지만 회로상

에는 전류가 흐르는 것처럼 보이는데 이를 변위전류의 개념으로 이해할 수 있습니다.

► 전자기장(電磁氣場, electromagnetic field)

전기장과 자기장을 총칭하는 말로 전기장과 자기장이 서로 연관되어 나타날 때, 양쪽을 합쳐서 전자기장 혹은 전자장이라고도 합니다. 원래 전기장은 정전하(靜電荷)의 주위에, 자기장은 자극(磁極)의 주위에 생기는 것으로 각각 독립된 물리대상이지만, 전하가 운동하여 전기장이 시간적으로 변동하는 곳에서는 반드시 자기장이 생기고, 역으로 자기장이 변동하면 전기장이 동반되는 등, 일반적으로는 양쪽이 동시에 나타나는 경우가 많으므로 이를 전자기장이라고 합니다. 특히 회로에 주기적인 진동 전류가 흐르면 주위의 공간에는 그것과 같은 주기로 변동하는 자기장이 나타나고, 또한 이 진동 자기장은 전기장을 유발하는 원인이 되어, 결과적으로 전기장과 자기장이 서로 유기되면서 일종의 파동(波動)으로서 공간에 전파하게 됩니다. 이것이 전자기파(電磁氣波)입니다. 전자기장은 이와 같이 전하나 자기의 운동에 의해 야기되는 공간의 상태이지만, J.C.맥스웰은 이와 같은 특수한 공간의 장(場)을 그 발생원(發生源)인 전하나 자기에서 분리된 독립적인 물리적 존재로 취급하고, 1864년 전기장 ·자기장의 상호관계를 조사하여 전자기장이론을 세웠습니다. 이 이론의 기초가 되는 전자기장방정식은 전자기이론의 기초가 되는 것으로 맥스웰방정식이라 합니다.

► 전자기복사(電磁氣輻射, electromagnetic radiation)

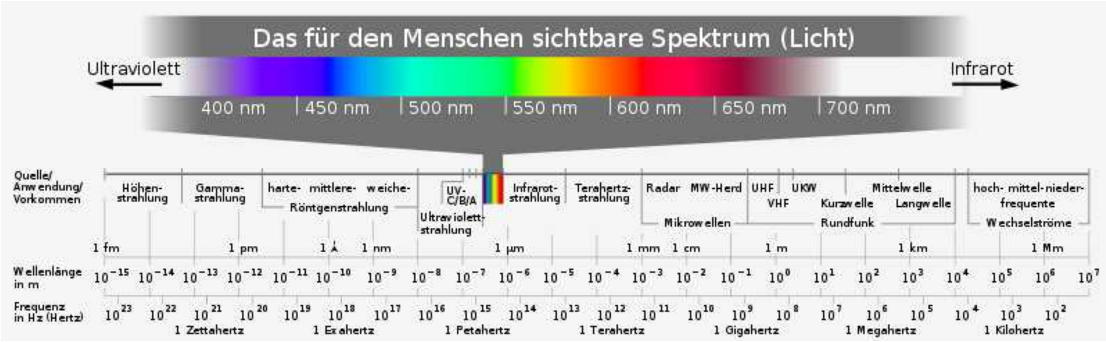
전자기파(電磁氣波, Electromagnetic radiation, EMR)는 전기장과 자기장의 두 가지 성분으로 구성된 파동으로, 공간을 광속으로 전파합니다. 전자기파는 광자를 매개로 전달되며 파장에 따라 전파, 적외선, 가시광선, 자외선, X선, 감마선 등으로 나누어집니다. 인간의 눈에서 인지하는 빛은 가시광선(visible ray)이며, 가시광선을 비롯한 여러 파장의 빛은 전자기파의 일부입니다.

전자기파는 전자기학에 관한 맥스웰 방정식에 의해 고전적으로 설명되는데, 전기장과 자기장을 하나의 방정식으로 표현할 때 파동방정식의 모양을 갖는다는 점에 착안하여, 전기장과 자기장이 서로 상호작용하면서 파동의 형태로 공간 속을 진행하는 현상으로 해석한 것입니다. 일반적인 파동과는 달리 전자기파는 매질이 없이 진행할 수 있으며, 그 속도는 유전율과 투자율의 곱의 제곱근으로 흔히 알파벳 c로 나타내고 파장 λ과 진동수 ν와 함께 다음의 관계에 있습니다.

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

양자 역학에 의하면 전자기파는 파동인 동시에 입자적 성질 또한 가지게 되는데 이때 사용된 입자라는 단어는 에너지 덩어리로서의 입자입니다. 즉 특정 진동수를 가지는 전자기파는 그 진동수 ν와 플랑크상수 h의 곱에 해당하는 에너지를 단위로 양자화되어 있습니다.

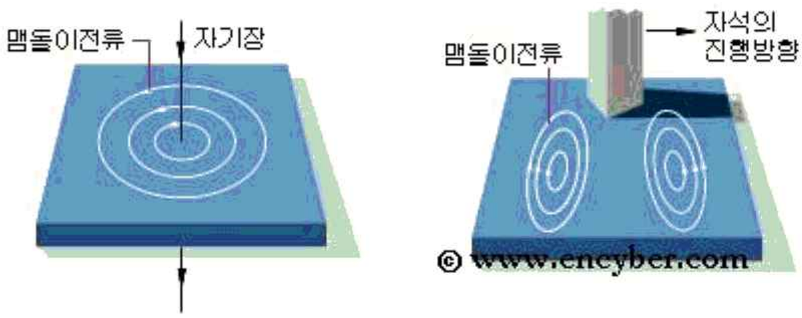
$$E = h\nu$$



전자기파 스펙트럼

► 맴돌이전류(一電流, eddy current)

맴돌이전류는 도체의 내부안에서 만들어지는 전류로, 도체 전체가 아닌 일부분에 소용돌이 모양으로 닫힌 통로를 흐르는 전류로서, 도체 내부를 지나는 자기력선속의 변화로 인해서 생기는 전류를 말합니다. 자석을 도체판 위에서 이동시키면 자기력선속이 변하면서 맴돌이전류가 생기고, 맴돌이전류의 자기장은 자석의 이동을 방해하게 됩니다.



와전류(渦電流) 또는 발견자의 이름을 따서 푸코전류(Foucault current)라고도 합니다. 아라고의 원판으로 그 존재를 간단히 알 수 있습니다. 자기장 내부의 도체판에 대해 가한 자기장을 변화시키면 자기장의 변화를 방해하는 전류가 흐르게 되며 이를 맴돌이전류라고 합니다. 또한 자기장 내부에서 도체판을 움직여 도체판에 가해진 자기장이 변화할 때에도 맴돌이전류가 발생합니다. 맴돌이전류는 도체가 자기장의 변화에 저항하는 렌츠의 법칙에 의해 나타나며 이 때 전류의 방향은 도체에 가해진 자기장의 변화에 반대되는 자기장을 생성하는 방향으로 결정됩니다.

맴돌이전류는 자기장의 변화에 저항하는 전류로 이는 자기장 내에서 움직이는 도체의 운동을 방해하는 효과로 나타납니다. 전동기나 발전기 등은 자기장을 만드는 부분과 자기장에서 움직이는 도체로 이루어지며 이를 통해 역학적에너지와 전기에너지를 변환합니다. 이 때 발생하는 맴돌이전류는 구동부분의 역학적 에너지를 줄열 가열(Joule heating)로 소모시켜 효율을 떨어뜨립니다. 이를 해결하기 위해서는 자기장 내부의 도체를 낮은 전기전도도를 갖는 물질로

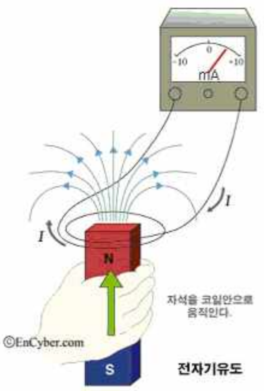
대체하거나 맴돌이전류가 부분적으로 나타나도록 부도체 층을 첨가한 재료를 사용합니다.

► 전자기유도(電磁氣誘導, electromagnetic induction)

도체의 주변에서 자기장을 변화시켰을 때 전압이 유도되어 전류가 흐르는 현상. 전류가 자기장을 형성한다는 사실이 알려지고 나서 자기장을 이용해 전류를 만들 수 있지 않을까 하는 의문이 자연스럽게 생겨났습니다. 패러데이와 헨리는 각각 전선 코일 속에 자석을 넣었다 뺐다 하는 단순한 운동으로 전선 속에 전류가 흐른다는 사실을 발견하였습니다. 이때 기전력을 만드는 것은 코일에 대한 자석의 상대적인 운동에 의한 자기장의 변화입니다. 자석이 도체 주위를 움직이거나 도체가 자석 주위를 움직이는 두 가지 경우 모두 전선에 기전력이 유도되며 도선에 유도전류가 흐르게 됩니다. 도선에 흐르는 전류의 크기는 코일에 감긴 전선의 수와 코일을 통과하는 자기장의 시간당 변화율에 비례합니다. 이처럼 전자기유도에 의해 회로 내에 유발되는 기전력의 크기는, 회로를 관통하는 자기력선속의 시간적 변화율에 비례하며, 이 관계를 나타낸 것을 패러데이의 법칙이라고 합니다.

► 패러데이의 법칙(―法則, Faraday's law)

M.패러데이가 발견한 법칙으로 1831년에 발견한 전자기유도 법칙이 이에 해당합니다. 전자기유도에 의해 회로 내에 유발되는 기전력의 크기는, 회로를 관통하는 자기력선속(磁氣力線束)의 시간적 변화율에 비례합니다. 기전력의 방향을 정하는 렌츠의 법칙과 함께 전자기유도가 일어나는 방식을 나타냅니다.



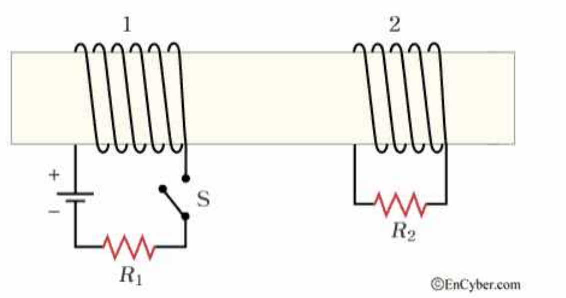
$$emf = -\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}$$

► 렌츠의 법칙 [―法則, Lenz's law]

유도기전력과 유도전류는 자기장의 변화를 상쇄하려는 방향으로 발생한다는 전자기법칙입니다. 패러데이 법칙의 부호(sign)가 렌츠의 법칙을 의미합니다. 1834년 러시아의 물리학자 렌츠(H.F.E.Lenz)가 발견하였습니다. 회로와 전자기장의 상대적인 위치관계 또는 전류에 대한 자극의 크기가 변화할 경우 유도전류와 유도기전력은 원래의 자기장의 변화를 상쇄하는 방향으로 발생한다는 전자기법칙입니다. 페러데이 법칙의 (-)부호가 렌츠의 법칙을 의미하며, 렌츠의 법칙은 에너지보존의 다른 표현이기도 합니다.

회로와 전기장의 상대적인 위치가 변할 경우, 그 변화를 저지하려는 방향으로 유도기전력이 발생합니다. 전류가 흐르고 있는 코일에 자석의 N극을 가까이 하면 코일의 자기력선(자속)이

증가합니다. 이때 코일에는 유도전류가 발생하고, 자석에 의한 자속의 증가를 방해하는 방향으로 유도전류가 흐르게 됩니다.
　그림과 같이 스위치와 전원이 연결 된 회로(회로 1)과 저항만이 연결된 회로(회로 2)가 가까운 거리에 위치해 있습니다. 회로 1의 스위치를 닫으면 시계방향으로 전류가 흐르고, 회로 2의 자속이 변하여 회로 2에 반시계 방향으로 전류가 흐르게 됩니다. 이때 회로 1의 스위치를 열면 회로 1의 전류와 자기장이 감소합니다. 그러면 회로 2에는 변화에 대항하여 원래의 자속을 유지하기 위해 시계방향의 전류가 흐르게 되는 것입니다.
　렌츠의 법칙은 에너지 보존의 다른 표현이기도 합니다. 만약 한 회로 1에 발생한 기전력이 회로 2에 같은 방향의 유도기전력을 발생시킨다면, 회로 2의 변화에 의해 다시 회로 1에 같은 방향의 유도기전력이 발생할 것입니다. 결국 이런 일이 한없이 되풀이 되고 두 회로의 전력은 무한대로 커지게 됩니다. 즉, 적은 에너지로 큰 에너지를 얻을 수 있게 되는 이러한 현상은 일어날 수 없으므로 렌츠의 법칙은 성립하게 됩니다. 곧 에너지 보존이 성립하기 위해서는 렌츠의 법칙이 옳다는 결론이 됩니다.



► 맥스웰방정식 [一方程式, Maxwell's equations]
　전자기 현상의 모든 면을 통일적으로 기술하고 있는, 전자기학의 기초가 되는 방정식입니다. 이 방정식을 기본으로 하여 맥스웰이 전자기장이론을 확립하였습니다.
　가우스 법칙, 자기에 대한 가우스 법칙, 패러데이 법칙, 맥스웰이 수정한 앙페르 법칙, 이상 4개의 법칙을 맥스웰 방정식이라고 합니다. 맥스웰은 전자기 현상이 4개의 방정식을 토대로 완전하게 기술될 수 있음을 보였습니다. 즉 전자기장과 관련된 어떠한 방정식도 이 방정식으로부터 정확하게 유도할 수 있습니다. 맥스웰 방정식을 나타내면 다음과 같습니다.

⑴ 전기장의 가우스 법칙 $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

⑵ 자기장의 가우스 법칙 $$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

⑶ 패러데이 법칙 $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \vec{\Phi}_B}{\partial t}$$

⑷ 맥스웰이 수정한 앙페르 법칙 $$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t})$$

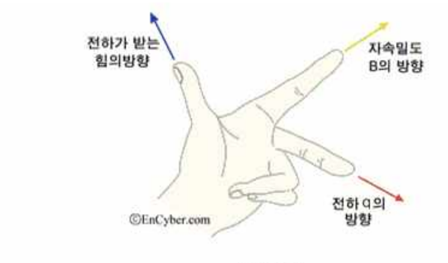
⑴ 가우스법칙은 전하에 의한 전기장을 기술하며, 쿨롱의 법칙을 유도하는데 사용할 수 있습니다.
⑵ 자기에 대한 가우스법칙은 자기력선은 연속이며, 자기 홀극(magnetic monopole)은 존재하지 않습니다. 자기 홀극이 없다는 것은 자석을 아주 작게 잘라도 N극과 S극으로 나누어진다는 것을 의미합니다.
⑶ 패러데이 법칙은 시간에 따라 변하는 자기장은 전기장을 생성할 수 있습니다.
⑷ 맥스웰이 수정한 앙페르 법칙은 시간에 따라 변하는 전기장은 자기장을 생성할 수 있다는 앙페르 법칙에 맥스웰이 다른 항을 하나 더 추가하여 만들었습니다. 이 부가적인 항을 변위전류라 하며, 전기선속의 시간 변화율에 의존합니다.

전자기장에 대하여 맥스웰이 수학적으로 이론화시킨 이 식이 물리적으로 중요한 의의를 가지는 것은 전자기현상의 모든 면을 통일적으로 기술할 뿐만 아니라 그 속에 변위전류(displacement current)라 하는 기존의 여러 법칙에 대응되지 않는 항도 포함하기 때문입니다. 즉, 맥스웰은 그 물리적 의미의 연구에서 이 항으로 표현되는 매질의 전기적인 변위가 자기적인 상호작용을 매개로 하여 공간을 전파하는 과정(전자기파)으로 존재하고, 그 전파속도의 계산값이 광속과 일치하는 사실로부터 빛의 전자기파설을 세웠습니다. 더욱 이 방정식이 갈릴레이-뉴턴의 상대성원리를 만족하지 않는 상황이 주목되어 이 모순을 해결하려고 하는 구상 가운데서 1905년 A.아인슈타인에 의해 특수상대성이론이 탄생하였습니다. 즉, 이 방정식을 기본으로 하는 맥스웰의 전자기장이론 확립은 물리학의 역사상 뉴턴역학의 형성과 비교될 만한 의의를 가지는 것으로, L.볼츠만에 의한 통계역학의 건설과 더불어 19세기 물리학이 이룩한 큰 성과로 높이 평가되고 있습니다.

► 로렌츠 힘 [Lorentz force]

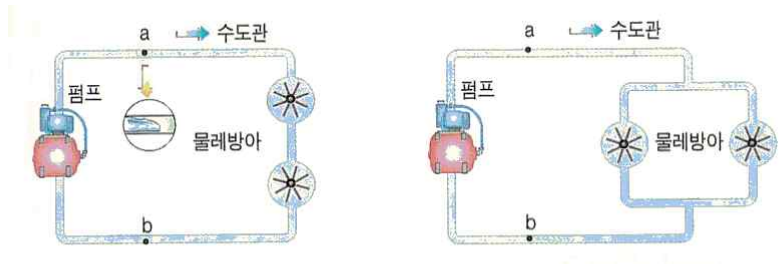
하전입자가 자기장 속에서 받는 힘을 말합니다. 이 힘은 운동하는 전하만 받고, 정자기장에서는 자기장이 전하의 운동 방향에만 영향을 미칩니다. 이 힘을 표현한 식을 이용하면 임의의 전자기장 내의 힘의 작용 전체를 나타낼 수 있습니다.

입자의 전하를 e, 자속밀도를 B, 속도를 v, 광속을 c라 하면, 이 힘은 $\vec{F}=e[\vec{v}\times\vec{B}]/c$가 됩니다. 즉, 운동 전하에 대해서는 힘을 미치나, 힘의 방향은 자속과 속도 방향과 수직이므로 정자기장(靜磁氣場)은 운동하는 하전입자에 대해서는 일을 하지 않고, 다만 그 운동 방향만 바꿀 뿐입니다. H.A.로런츠는 금속의 전자론에 이 힘을 도입했는데, 식 자체는 간단하지만 임의의 전자기장 내의 힘의 작용 전체를 나타낼 수 있음을 밝혔습니다.



로렌츠힘

⑤ 전기회로 [電氣回路, electrical network]
전류가 흐를 수 있도록 전지, 도선, 스위치 등을 연결해 놓은 폐경로를 의미합니다.



전기 회로에 흐르는 전류를 물의 흐름에 비유

전기회로는 전류의 순환회로를 의미하며 단순히 회로라고도 합니다. 전기회로 내 전류의 흐름을 수학적으로 표현하는 두 가지 기본법칙은 옴의 법칙과 키르히호프의 법칙입니다.

회로는 저항, 콘덴서, 트랜지스터, 진공관 등의 회로소자로 구성되어 있으며, 각 소자는 도선으로 연결됩니다. 소자는 수동소자와 능동소자로 나눌 수 있습니다. 수동소자는 에너지를 만들거나 증대시키지 않는 소자로 저항, 콘덴서, 코일 등이 있습니다. 반면 능동소자는 에너지를 발생, 증대 또는 변환시키는 소자로 트랜지스터, 진공관 등이 있습니다.

전원에 따라 직류회로와 교류회로로 나눌 수 있습니다. 직류회로에서는 전류가 한 방향으로만 흐르고, 교류회로에서는 1초에 수십 번씩 전류의 방향이 바뀝니다. 또 회로의 접속방법에 따라 직렬회로와 병렬회로로 나눌 수 있습니다. 직렬회로는 회로가 나누어지지 않고, 각 소자마다 전체 전류가 흐르는 하나의 경로로 구성됩니다. 병렬회로는 회로가 나누어져 있고, 각각의 나누어진 회로에는 전체 전류의 일부분이 흐릅니다.

► 레지스턴스(resistance)
도체에 전류가 통과하기 어려운 정도를 나타내는 수치입니다. 물체가 움직일 때 이동방향의 반대방향으로 이동을 방해하는 저항이 있을 수 있습니다. 예를 들어, 비행기가 날아갈 때는 반대방향으로 공기저항이 작용합니다. 저항은 움직임을 방해하는 것을 말하는데 전기의 이동에서도 저항이 존재합니다. 전기의 흐름에 대한 저항을 전기저항이라 합니다. 따라서 전기저항이 크면 전류가 잘 통하지 않고 전기전도율이 낮아집니다.

전기저항의 크기를 나타내는 단위는 Ω(옴)입니다. 1Ω은 1V(볼트)의 전압으로 1A(암페어)의

전류가 흐를 때의 저항입니다. 저항값은 물질의 종류에 따라 다릅니다. 은과 구리는 전기저항이 가장 작은 금속이기 때문에 전선을 만드는 재료로 많이 사용합니다. 또한 전기저항은 길이에 비례하고 단면적에 반비례합니다. 즉, 도선의 길이가 길면 전자가 지나가야할 길이 길기 때문에 저항이 크고, 단면적이 넓으면 전자가 이동하기 쉬우므로 저항이 작아집니다. 도선은 굵게 만들수록 저항이 작아져서 더 효율적이지만 재료가 더 많이 사용되므로, 용도와 가격에 맞는 적당한 굵기로 만듭니다. 도선의 길이, 단면적과 저항의 관계를 식으로 나타내면, 도선상의 두 점 사이의 길이를 L, 단면적을 A 라 할 때 두 점 사이의 저항은 다음과 같이 됩니다.

$$R = \rho L/A$$

비례상수 ρ는 물질의 고유한 값으로 저항률 또는 비저항이라 합니다. 일반적으로 물질의 저항값은 온도에 따라 변하는데 도체는 온도가 상승하면 전기저항이 증가하지만 반도체나 절연체에서는 오히려 작아지는 경향을 보입니다.

► 커패시턴스(capacitance)

축전기에서 걸어준 전위(전압)당 충전되는 전하량으로서 1V의 전압을 걸었을 때 축전기 역할을 하는 회로에 모이는 전하량입니다. 단위는 패럿(F)입니다. 정전기용량(정전용량) 또는 커패시턴스(capacitance)라고도 합니다. 도체의 모양이나 도체판 사이를 절연하고 있는 유전체에 의하여 값이 정해집니다. 정전용량은 보통 물체의 총 전하량을 물체의 전압으로 나눈 값으로 정의합니다.

$$C = Q/V$$

이상적인 평행판 축전기의 경우, 축전기의 전기용량 C의 크기는 다음과 같습니다.

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

즉, 전극의 면적과 유전체의 유전상수에 비례하고 전극 사이의 거리에 반비례합니다. 물리학자 제임스 클러크 맥스웰은 축전기 같은 곳에서 전하가 모일 때에도 암페어의 법칙이 성립하도록 하기 위해 변위 전류 $\frac{d\vec{D}}{dt}$라는 개념을 제시하였습니다.(변하는 전기장은 자기장을 만든다.)

► 인덕턴스(inductance)

회로를 흐르는 전류의 변화에 의해 전자기유도로 생기는 역기전력의 비율을 나타내는 양으로 단위는 H(헨리)입니다. 자속(磁束) 변화의 원인에 따라 자체인덕턴스와 상호인덕턴스로 나누어집니다. 회로를 흐르는 전류가 변하면 회로를 관통하는 자력선속(磁力線束)도 함께 변합니다. 자속의 변화는 전자기유도현상을 일으키고 회로에는 전류의 변화를 방해하는 방향으로 유

도기전력이 생깁니다. 따라서 자속 변화의 영향을 많이 받는 고리모양의 회로, 특히 코일에서 이 현상이 두드러지게 됩니다. 전자기유도현상에서 유도기전력의 크기는 자속의 변화율로 결정됩니다. 하지만 회로 또는 코일의 모양이 일정한 경우 자속의 변화량은 전류의 변화량에 비례하고, 이때 비례상수가 인덕턴스가 됩니다. 따라서 유도기전력의 크기는 인덕턴스와 전류의 시간당 변화율의 곱으로 표현됩니다.

유도기전력의 원인, 즉 회로를 통과하는 자속 변화의 원인에 따라 두 가지로 나누어집니다. 역기전력이 자기 자신의 회로에 흐르는 전류의 변화로 유도될 때의 인덕턴스를 자체인덕턴스라 하고, 결합되어 있는 상대방의 회로에 흐르는 전류의 변화로 유도될 때는 상호인덕턴스라고 합니다.

N번 감은 코일(이하 솔레노이드)에 흐르는 전류 I는 자속 Φ(파이)을 발생시킵니다. 전류가 변화할 때 자속도 변화하고, 전류의 변화에 비례하는 유도 기전력이 나타나게 됩니다. 이 때 비례상수를 코일의 유도용량이라 합니다. 전류 I가 흐르는 N번 감긴 솔레노이드는 흐르는 전류에 의해 솔레노이드의 각각의 고리를 통과하는 자기장이 발생합니다. 솔레노이드를 통과하는 전체 자속은 하나의 고리를 지나는 자기 선속과 감은 수의 곱이 됩니다. 이것은 코일에 흐르는 전류에 비례합니다. 이 말을 식으로 간단히 써보면 다음과 같습니다.

$$N\Phi = LI$$

여기서 Φ(파이)는 솔레노이드를 통과하는 자속, I는 솔레노이드에 흐르는 전류, L은 유도용량으로 비례상수입니다. 상호 유도용량과 구별하기 위해 자체 유도용량이라고도 합니다. 유도용량의 단위는 H(헨리, henry)를 사용합니다. 단면적이 A이고 무한히 긴 솔레노이드의 단위 길이당 유도 용량은 솔레노이드의 감긴 코일의 수와 솔레노이드의 단면적에 의존합니다. 유도용량을 나타내는 회로 부품은 인덕터(inductor)라 하며 보통 스프링 모양이 됩니다. 인덕터는 감은 수(N)가 많을수록 주어진 전류에 대해 전체 자기 선속이 더 크게 됩니다. 이는 더 큰 유도용량을 갖는다는 말과 같습니다.

► 임피던스(impedance)

교류회로에서 전류가 흐르기 어려운 정도를 나타냅니다. 복소수로서 실수부분은 저항, 허수부분은 리액턴스를 의미하며, 크기뿐 아니라 위상도 함께 표현할 수 있는 벡터량입니다. 단위는 SI 단위계로 옴(Ω)을 사용하며, 보통 기호 Z로 표시합니다. 임피던스의 역수는 어드미턴스라고 합니다. 저항, 코일, 축전기가 직렬로 연결된 교류회로의 합성저항을 임피던스라고 합니다. 임피던스는 전압과 전류의 비율외에 위상도 함께 나타내는 벡터량입니다. 복소수 Z=R + i x (i는 허수단위)로 표시하며 실수부분 R은 저항값이며, 허수부분 x는 리액턴스입니다.

직류회로에서는 전기저항이 곧 전압과 전류의 비를 의미합니다. 그러나 교류회로에서는 코일이나 축전기에 의해 전압과 전류의 위상이 달라지므로 복소임피던스를 사용하여 저항값과 위상을 함께 나타내게 됩니다. 저항을 통과한 전류는 전압과 위상이 같으며, 코일에 전류가 흐르면 전류보다 전압의 위상이 90°(1/4주기)가 빠르게 되며, 축전기에 의해서는 전압이 전류보다 90°늦어집니다. 따라서 저항, 코일, 축전기를 통과한 후 위상 δ는 다음과 같이 쓸 수 있으

며, 복소 임피던스의 각이 됩니다.

$$\tan\delta = \frac{|V_L| + |V_C|}{|V_R|} = \frac{X_L - X_C}{X_R}$$

임피던스 Z는 직류에서의 저항값에 해당하며, 크기는 아래와 같습니다.

$$Z = \sqrt{(R^2 + X^2)} = \sqrt{R^2 + (X_L^2 - X_C^2)}$$

여기서 R은 저항, $X = X_L - X_C$는 전체 리액턴스(total reactance)입니다. X값은 유도성일 때는 양의 값이, 용량성일 때는 음의 값이 됩니다. 직렬 접속시킨 회로의 임피던스는 각 요소들의 합이 되며, 병렬 접속시킨 것의 임피던스의 역수는 각 임피던스의 역수의 합과 같습니다.

$$Z_{series} = Z1 + Z2 = (R1 + R2) + i(X1 + X2)$$
$$(Z_{parallel})^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$$

교류는 시간에 따라 그 값이 변화하므로 전류와 전압의 실효값을 사용합니다. 따라서 교류 전압의 실효값을 V_e라고 하면, 전류의 실효값 $I_e = V_e/Z$ 가 됩니다.

► 키르히호프의 법칙(—法則, Kirchhoff's law)

독일의 물리학자 G.R.키르히호프(Gustav R. Kirchhoff, 1824~1887)가 1849년 발견한 법칙으로 전자기학 분야에서 정상전류에 대한 옴의 법칙을 일반화하였습니다. 임의의 복잡한 회로를 흐르는 전류를 구할 때 사용되며, 전류에 관한 제1법칙과 전압에 관한 제2법칙이 있습니다. 이 두 법칙을 수식으로 나타낸 연립방정식의 해로 전류를 구할 수 있습니다.

⑴ 제1법칙 : 접합점 법칙 또는 전류법칙이라고 합니다. 회로 내의 어느 점을 취해도 그곳에 흘러 들어오거나(+) 흘러 나가는(-) 전류를 음양의 부호를 붙여 구별하면, 들어오고 나가는 전류의 총계는 0이 된다는 것을 의미합니다. 즉, 전류가 흐르는 길에서 들어오는 전류와 나가는 전류의 합이 같다는 것을 의미합니다. 제1법칙은 전하가 접합점에서 저절로 생기거나 없어지지 않는다는 전하보존법칙에 근거를 두고 있습니다.

⑵ 제2법칙 : 폐회로 법칙, 고리법칙 또는 전압법칙이라고 합니다. 임의의 닫힌 회로(폐회로)에서 회로 내의 모든 전위차의 합은 0이 되는 것을 의미합니다. 즉, 임의의 폐회로를 따라 한 바퀴 돌 때 그 회로의 기전력의 총합은 각 저항에 의한 전압 강하의 총합과 같다는 것을 의미합니다. 먼저 회로의 도는 방향(시계방향 또는 반시계방향)을 정하고 그 방향으로 돌아가는 기전력 E와 전압강하 IR의 부호를 정합니다. 전류와 저항과의 곱의 총계 $\sum I_n R_n$는 그 속에 포함된 기전력의 총계 $\sum E_n$와 같다는 것입니다. 이 법칙은 직류와 교류 모두 적용할 수 있으며, 저항 외에 인덕턴스, 콘덴서를 포함하거나 저항을 임피던스로 바꿀 수 있습니다. 제2법칙은 에

너지 보존법칙에 근거를 두고 있습니다.

4-2 전자기학에 공헌한 과학자(Scientists)

전자기학과 관련하여 중요한 공헌을 한 과학자를 정리하면 아래의 표와 같습니다. 약 100년에 걸쳐서 중요한 발명과 법칙이 발표되었음을 알 수 있습니다.

년도	이름
1736.06.14. ~ 1806.08.23.	샤를 오귀스탱 드 쿨롱(Charles Augustin de Coulomb)
1745.02.18. ~ 1827.03.05.	알레산드로 주세페 안토니오 아나타시오 볼타(Alessandro Giuseppe Antonio Anatasio Volta)
1774.04.21. ~ 1862.02.03.	장-바티스트 비오(Jean-Baptiste Biot)
1775.01.20. ~ 1836.06.10.	앙드레마리 앙페르(André-Marie Ampère)
1777.04.30. ~ 1855.02.23.	카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss)
1777.08.14. ~ 1851.03.09.	한스 크리스티안 외르스테드(Hans Christian Ørsted)
1791.09.22. ~ 1867.08.25.	마이클 패러데이(Michael Faraday)
1797.12.07. ~ 1878.05.13.	조지프 헨리(Joseph Henry)
1804.02.12. ~ 1865.02.10.	하인리히 렌츠(Heinrich Friedrich Emil Lenz)
1804.10.24. ~ 1891.06.23.	빌헬름 에두아르트 베버(Wilhelm Eduard Weber)
1831.06.13. ~ 1879.11.05.	제임스 클러크 맥스웰(James Clerk Maxwell)
1853.07.18. ~ 1928.02.04.	헨드릭 안톤 로런츠(Hendrik Antoon Lorentz)
1856.07.10. ~ 1943.01.07.	니콜라 테슬라(Nikola Tesla)
1857.02.22. ~ 1894.01.01.	하인리히 루돌프 헤르츠(Heinrich Rudolf Hertz)

► 샤를 오귀스탱 드 쿨롱(Charles Augustin de Coulomb, 1736.6.14.-1806.8.23.)

프랑스의 토목학자, 물리학자, 전기학자입니다. 정전기력의 크기를 나타낸 쿨롱의 법칙으로 유명하며 전하량을 나타내는 SI 단위 쿨롱은 그의 이름을 딴 것입니다

► 알레산드로 주세페 안토니오 아나타시오 볼타(Alessandro Giuseppe Antonio Anatasio Volta, 1745.2.18.-1827.3.5.)

이탈리아의 물리학자로서 연속 전류를 공급해 줄 수 있는 전지를 처음으로 개발하였습니다. 전압을 측정하는 단위인 볼트는 1881년 볼타의 업적을 기려 그의 이름을 딴 것입니다.

► 장-바티스트 비오(Jean-Baptiste Biot, 1774.4.21.-1862.2.3.)

프랑스의 수학자, 물리학자, 천문학자입니다. 1820년에는 동료 사바르와 함께 전류가 자석에 미치는 힘에 관한 비오·사바르의 법칙을 제시하였습니다.

► 앙드레마리 앙페르(André-Marie Ampère, 1775.1.20.-1836.6.10.)

프랑스의 물리학자로서 전기·자기의 연구에 몰두하여 근대 전기학의 기초를 세웠습니다. 전류를 측정하는 데 쓰이는 단위 암페어는 앙페르의 이름에서 온 것입니다.

► 카를 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777.4.30.-1855.2.23.)

독일의 수학자, 과학자입니다. 정수론, 통계학, 해석학, 미분기하학, 정전기학, 천문학, 광학 등 많은 분야에서 크게 기여하였습니다. 가장 위대한 수학자로 불리는 가우스는 수학과 과학의 많은 영역에 주목할 만한 업적을 이루었습니다. 가우스는 수학을 ‘과학 중의 여왕’으로 칭하였습니다.

► 한스 크리스티안 외르스테드(Hans Christian Ørsted, 1777.8.14.-1851.3.9.)
덴마크의 물리학자, 화학자입니다. 전자기학 부분에서 전기와 자기의 관계에 대해 발견한 것으로 잘 알려져 있습니다. 1820년 4월 21일에 저녁 실험 강의에서 전류가 흐를 때, 전선의 주변에 있던 나침반 바늘이 북극을 가리키지 않는 것을 알아차리면서, 전류가 자기장을 발생시킨다는 것을 처음으로 발견하였습니다. 외르스테드가 발견한 것은 정말로 인류 역사 이래 과학분야에서 가장 위대한 발견 중의 하나입니다. 자기장의 세기의 단위인 에르스텟(Oe)은 그의 업적을 기리기 위해 이름을 딴 것입니다.

► 마이클 패러데이(Michael Faraday, 1791.9.22.-1867.8.25.)
영국의 물리학자, 화학자입니다. 직류 전류가 흐르는 도체의 자기장에 대해 연구하여 이에 대한 기초를 세웠습니다. 그는 전자기유도, 반자성 현상 그리고 전기 분해를 발견했습니다. 또한 자성이 광선에 영향을 미칠 수 있다는 것과 그들 사이의 근본적인 관계가 있다는 것을 확립했습니다. 그가 발명한 전자기 회전 장치는 전기 모터의 근본적 형태가 되었습니다. 화학자로서, 패러데이는 벤젠을 발견했고, 초기 형태의 벤젠 버너, 산화 상태들의 체계, 그리고 양극, 음극, 전극, 이온과 같이 널리 쓰이는 전문 용어들을 발명했습니다.

► 조지프 헨리(Joseph Henry, 1797.12.7.-1878.5.13.)
미국의 물리학자입니다. 원래 시계 기술자였으나, 후에 물리학을 연구하였습니다. 1830년에 패러데이와는 다르게 전자 유도와 전류의 자기 유도 현상을 발견하여 전자기학을 발전시키는데 크게 공헌하였습니다. 유도계수의 단위인 헨리는 그의 이름을 딴 것입니다.

► 하인리히 렌츠(Heinrich Friedrich Emil Lenz, 1804.2.12.-1865.2.10.)
러시아에서 태어난 독일의 물리학자입니다. 1834년 전자기유도(電磁氣誘導)가 일어나는 방향에 대해 처음으로 일반적인 법칙을 발견하여 이를 ‘렌츠의 법칙’이라 하였습니다. 또 유도기전력의 세기를 측정하여 그것이 회로를 만드는 도체의 종류와는 관계가 없다고 하는 ‘렌츠의 실험’을 하여 전자기유도 연구를 개척하였습니다.

► 빌헬름 에두아르트 베버(Wilhelm Eduard Weber, 1804.10.24.-1891.6.23.)
독일의 물리학자이며, 전자기론의 개척자입니다. 1846년 '베버의 법칙'을 발견하여 전기 역학적 현상의 기초를 세웠습니다. 전류계, 지자기, 감응기 등을 고안하고 전기의 여러 양의 절대 단위계를 도입하였습니다. 가우스와 자기학을 연구해 1864년에 전하의 절대 단위 체계를 포함하는 논문을 발표하였습니다. SI 단위 중 자속을 나타내는 웨버(symbol: Wb)는 그의 이름을 딴 것입니다.

► 제임스 클러크 맥스웰(James Clerk Maxwell, 1831.6.13.-1879.11.5.)

영국의 이론물리학자, 수학자입니다. 그는 전기 및 자기 현상에 대한 통일적 기초를 마련하여 전자기학의 성립에 큰 영향을 주었습니다. 전기와 자기를 단일한 힘으로 통합해 뉴턴 역학과 함께 과학 발전의 초석이 되었습니다. 수학에 뛰어났던 그가 기존에 존재했던 패러데이 법칙, 쿨롱의 법칙 등 전자기 이론을 수식적으로 정리하여 나타낸 식이 “맥스웰 방정식”입니다. 이 방정식은 전자기학의 기초가 되는 미분 방정식으로 이는 볼츠만의 통계역학과 함께 19세기 물리학이 이룬 큰 성과로 높이 평가받고 있습니다. 그는 전기장과 자기장이 모두 공간에서 빛의 속도로 전파되는 파동으로 설명될 수 있다는 것을 증명하였고, 1864년 《전자기장에 관한 역학 이론》을 발표하여 빛이 전기와 자기에 의한 파동, 즉 전자기복사라는 것을 증명하였습니다.

► 헨드릭 안톤 로렌츠(Hendrik Antoon Lorentz, 1853.7.18.-1928.2.4.)

네덜란드의 물리학자입니다. 맥스웰의 전자기학 이론을 발전시켜 물질을 하전 입자의 집합이라고 생각하는 전자론에 기반하여 광학·전자기 분야의 다양한 현상을 설명하였으며, 전자가 실제로 존재하는 입자라는 사실을 제시하였습니다. 전자론으로 제만 효과를 이론적으로 설명해 낸 것은 그의 가장 대표적인 업적입니다. 하전 입자가 전기장이나 자기장 안에서 힘을 받는 것을 유도하였으며 현재 이 힘을 로렌츠 힘이라고 부르고 있습니다.

► 니콜라 테슬라(Nikola Tesla, 1856.7.10.-1943.1.7.)

미국의 물리학자, 기계공학자, 전기공학자입니다. 그는 상업 전기에 중요한 기여를 했으며, 19세기 말과 20세기 초 전자기학의 혁명적인 발전을 가능케 한 인물로 잘 알려져 있습니다. 테슬라의 이론적 연구는 전기 배전의 다상시스템과 교류 모터를 포함한 현대적 교류 시스템의 기초를 형성하였습니다. 그의 이러한 연구는 2차 산업 혁명을 선도하는 역할을 하였습니다.

라디오를 통한 무선 통신을 1894년 최초로 실현하였습니다. 그는 현대 전기 공학을 개척했으며 수많은 그의 발명은 선도자로서 중요한 역할을 하였습니다. 현재 그의 이름 테슬라는 자속 밀도를 재는 SI 단위로 사용됩니다.

► 하인리히 루돌프 헤르츠(Heinrich Rudolf Hertz, 1857.2.22.-1894.1.1.)

독일의 물리학자입니다. 일상생활에서 자주 사용하는 주파수의 단위 헤르츠는 그의 이름에서 따온 것입니다. 헤르츠는 라디오파를 만들어 내는 장치를 만들어 전자기파의 존재를 처음 실증해 보였습니다.

실험을 통해 전기 신호가 공기 중을 통해 전달될 수 있다는 제임스 클러크 맥스웰과 마이클 패러데이의 예견을 실증하였습니다. 이는 무선통신을 발명하게 된 기초가 되었습니다. 또한 알베르트 아인슈타인이 설명하는 광전효과를 처음으로 발견하였습니다. 광전효과는 물체에 주파수가 높은 빛을 비출수록 전자를 잘 내놓는 현상을 말합니다.